担当教員:米田、戸倉川
月、7限1930～2100、西5-109

応用数学A

教科書はある1つの本を使うわけではありません。

参考書として

わかりやすい応用数学，有松宏明，コロナ社

基礎解析学，矢野健太郎　石原繁, 裳華房

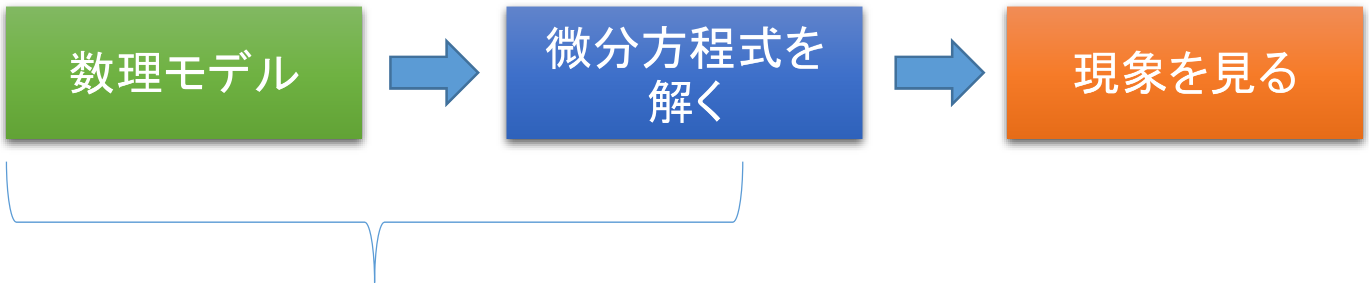
- 主題:ベクトル解析 ・複素数
  達成目標:講義の内容を理解して、力学、電磁気学、電気電子工学を学ぶために不可欠であるベクトル解析 を使いこなせるようにする 。また複素数により表される式の物理的な意味を理解して対応できるようにする。

- 評価:　レポート、(中間テスト)、期末テスト

応用数学とは

- 数学：真理(明らかな正しいこと)の探求
- 応用数学：数学を通じて社会への貢献を考える

数値解析も応用数学の代表例



この辺りを学ぶのを目標にする

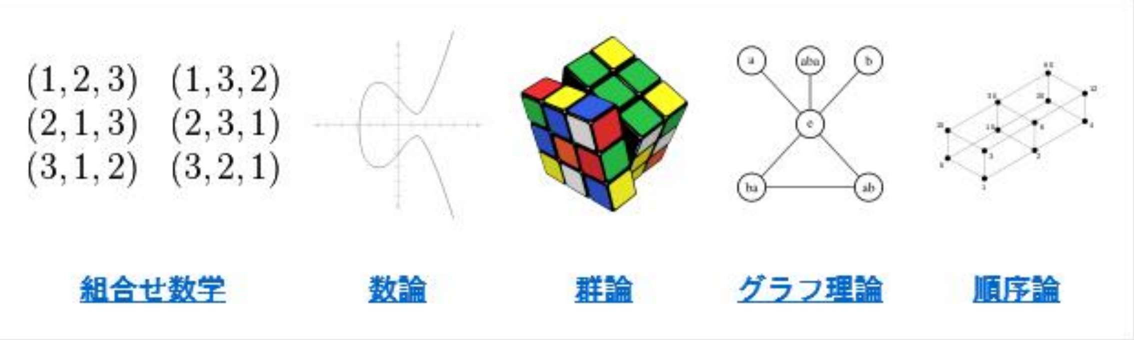
物理のための応用数学、工学系のための応用数学、電子情報系の応用数学
応用数学（臨床工学シリーズ）。。。。

純粋数学

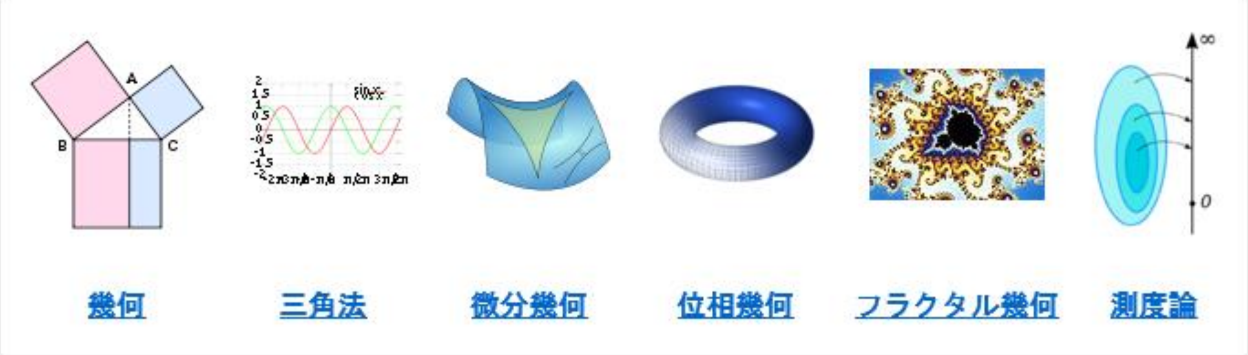
量

$1,2,3\ldots$	$\ldots-2,-1,0,1,2\ldots$	$-2,\frac{2}{3},1.21$	$-e,\sqrt{2},3,\pi$	$2,i,-2+3i,2e^{i\frac{4\pi}{3}}$
自然数	整数	有理数	実数	複素数

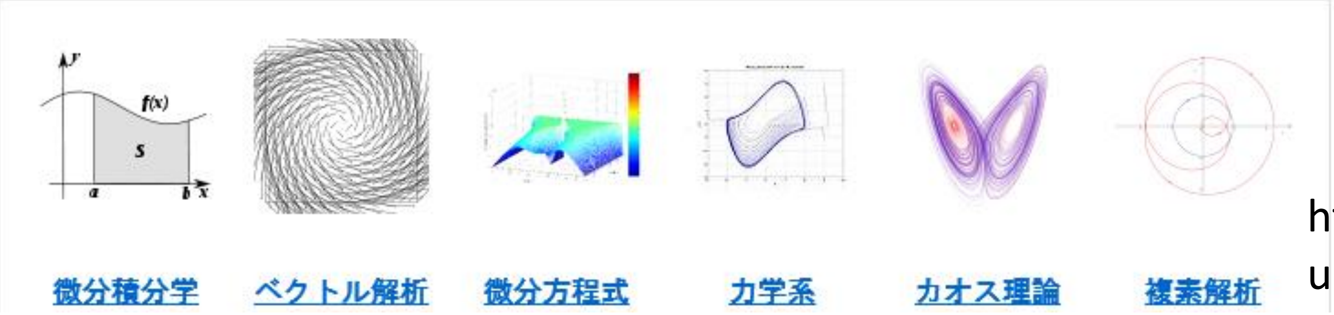
構造



空間

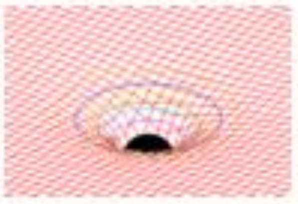


変化

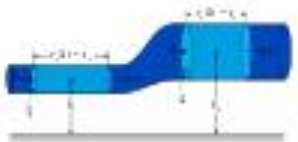


https://www.komazawa-u.ac.jp/~w3c/lecture/mathematics.html

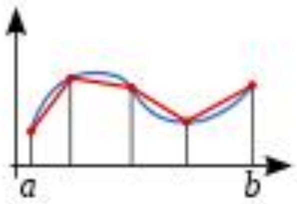
応用数学



数理物理学



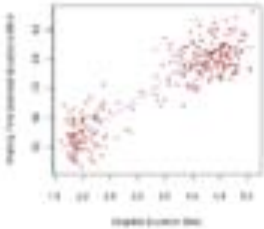
流体力学



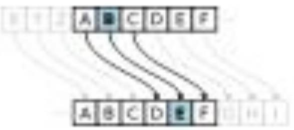
数値解析

最適化

確率論

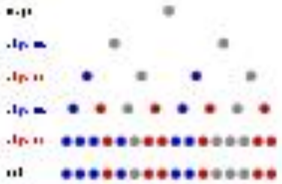


統計



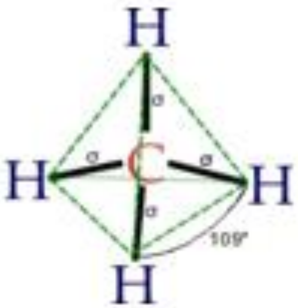
暗号理論

数理ファイナンス



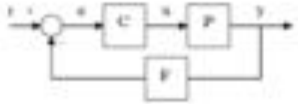
ゲーム理論

数理生物学



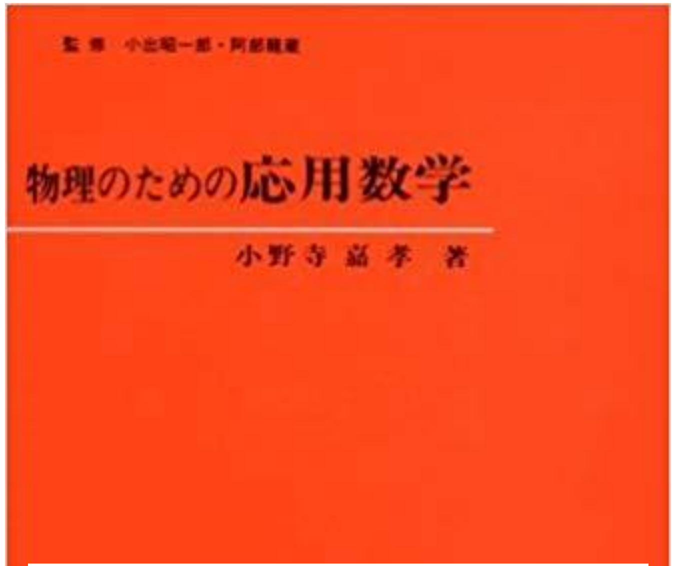
数理化学

数理経済学



制御理論

https://www.komazawa-u.ac.jp/~w3c/lecture/mathematics.html


物理のための応用数学
小野寺嘉孝 著

目次


わかりやすい
応用数学
ベクトル解析・複素解析・ラプラス変換・フーリエ解析
共著

目次


応用数学の基礎
第6版

本授業で主なカバーされる内容

できれば、なぜを考えるといい
できれば歴史を考えるといい
ぜひ、空間をイメージすることを

化学　<<　力学　<<　電磁気学

ベクトル

積分

複素数

大まかな内容

1. ベクトルの内積・外積の復習
2. ベクトル値関数の微分・積分
3. 曲線のベクトル関数,曲線の長さ
4. 曲面・接平面のベクトル関数、曲面積
5. 極座標表示と立体角
6. スカラー場の勾配、ベクトル場の発散
7. ベクトル場の回転、ラプラス演算子、ポテンシャル
8. 線積分と面積分
9. グリーンの定理.
10. ストークスの定理,
11. ガウスの発散定理
12. 複素数表示、四則演算
13. 三角関数の複素数表示、累乗根
14. 複素数を使用する具体的な例

広島大学大学院教育学研究科紀要　第二部　第57号　2008　19－28

ベクトルの外積に関する考察

― その概念の広がりと教材性に関して ―

今　岡　光　範

(2008年10月２日受理)

2.3.　歴史的側面

「ベクトル」という表現は，1845年のハミルトンの論文に初めて登場したという[9]。ハミルトンは，アイルランドの王室天文学者という称号を得た人であるが，数学や物理の分野でも優れた研究をした人である。数学の研究においては，特に，四元数の創始者として名高い[7]。以下に記述するように，四元数は外積と関係が深く，外積の概念の起こりはハミルトンの研究にあると考えられる。

四元数は，実数の概念を拡張した数であり，その集合には実数と同様に四則演算が定義できる。ただし，積に関して $xy=yx$ という可換性だけは成り立たない。そのように，四元数の集合は，積の可換性は満たさないがそれ以外の通常の四則演算の法則はすべて満たす数の集合である斜体というものになっている。高校の教材でもお馴染みの複素数は，やはり実数の概念を拡張した数であるが，その集合は，積の可換性も含めて実数の四則演算と同じ法則を満たす体というものになっている。実際，複素数は，閉体という，実数よりもすぐれた体である。加えて，複素数は平面の幾何的解釈を伴い，関数論を始め幅広い応用性を有している。ハミルトンは，三次元空間において本質的な役割を果たす数の体系を作れば，それは複素数以上に優れたものができるという信念をもって，四元数の概念を

つけるというのが，ハミルトンがめざしたものであった。二つの純四元数 q，q' に対応する空間ベクトルをそれぞれ v，w とすると，v と w の外積は，q，q' の積のベクトル部分 $V(qq')$ に対応する。すなわち，この対応を等号で表わせば，次が成り立つことが分かる。

$$v\times w=V(qq').$$

これが，外積と四元数の積との関係である。このように，外積は四元数に密接した概念であり，空間ベクトルが考えられたごく初期の段階から存在したものであることが分かる。

四元数の積の演算は，空間における回転の合成を記述するのに有用である（たとえば，Steenrod (1951)[16]，横田 (1973)[17]，一松 (1997)[15]）。それゆえ，外積も空間の回転と深く関係している。実際，空間のベクトル値関数 $v=(x, y, z)$（ベクトル場）に対して，その回転 $\mathrm{Rot}(v)=\nabla\times v$ は外積を用いて表わされる。

四元数は，ハミルトン以後，アイルランドを中心とした熱狂的な愛好家達によって研究されたが，複素数ほどまでには優れた数ではないことが判明している。ただ，物理や工学などへの数学の応用の中心は三次元空間であり，三次元空間で特有な数学の道具が比較的少ないことを考えれば，四元数および外積は，三次元空間の性質を調べる上で貴重な概念であると言えよう。

William Rowan Hamilton
1805－1865

四元数を，少し具体的にみてみよう。四元数 q は，

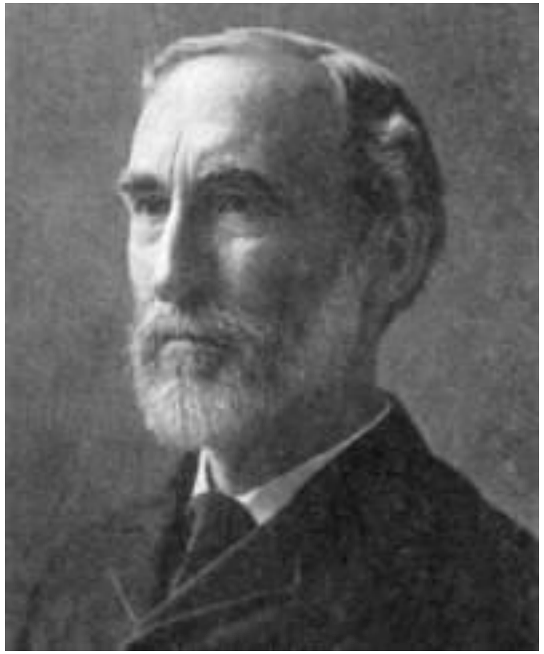
$$i^2=j^2=k^2=-1\,,\qquad ijk=-1$$

という関係を満たす単位 i, j, k を用いて，

$$q=a+bi+cj+dk \qquad (a, b, c, d\ \text{は実数})$$

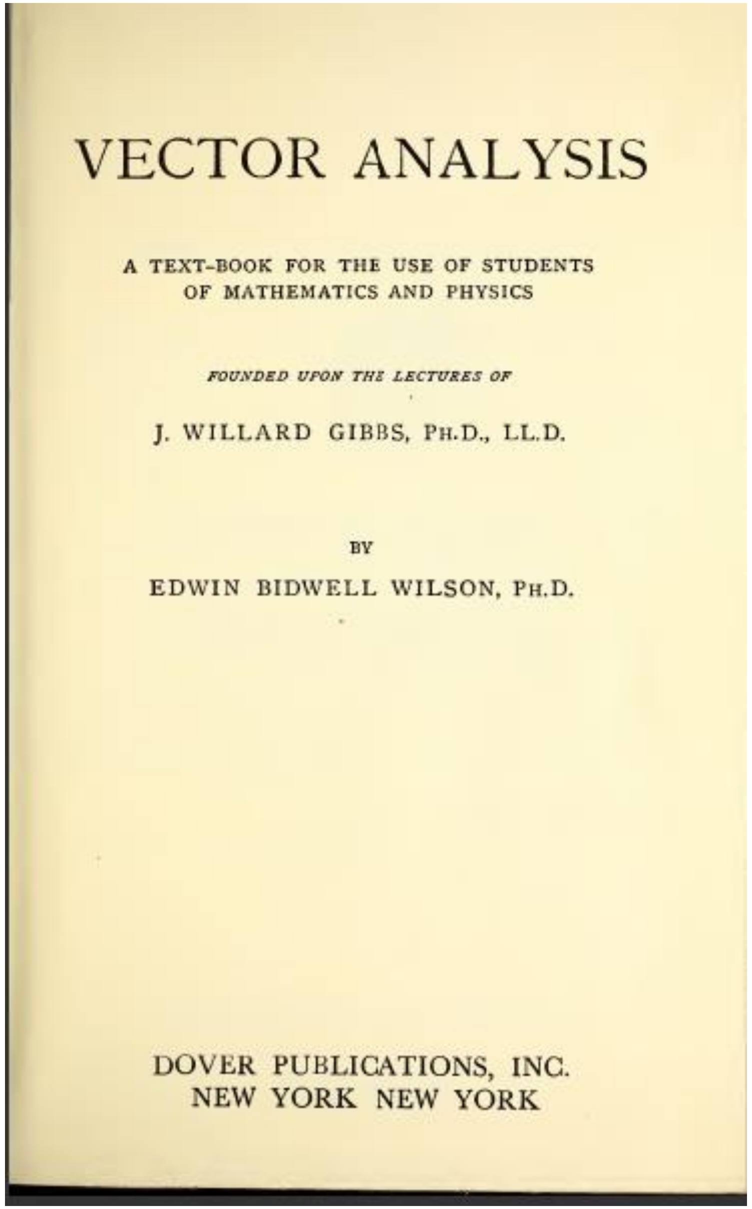
の形に表される数である。このとき，a を q の実部，$bi+cj+dk$ を q のベクトル部分という。四元数 q と

https://ia801703.us.archive.org/29/items/vectoranalysis00gibb/vectoranalysis00gibb.pdf



１８３９－１９０３

J. Willard Gibbs
ベクトル解析を始めた？



VECTOR ANALYSIS

A TEXT-BOOK FOR THE USE OF STUDENTS OF MATHEMATICS AND PHYSICS

FOUNDED UPON THE LECTURES OF

J. WILLARD GIBBS, PH.D., LL.D.

BY

EDWIN BIDWELL WILSON, PH.D.

DOVER PUBLICATIONS, INC.
NEW YORK NEW YORK

2.] **Definition** : A vector is a quantity which is considered as possessing **direction** as well as **magnitude**.
Definition : A scalar is a quantity which is considered as possessing magnitude but no direction.

方向と大きさ

Scalar Multiplication
6.] **Definition:** A vector is said to be multiplied by **a positive scalar** when its magnitude is multiplied by that scalar and **its direction is left unaltered.**

正の積は方向が変わらない

The Use of Vectors **to denote Areas**
25.] **Definition** : An area lying in one plane MN and bounded by a continuous curve PQR which nowhere cuts itself is said to appear positive from the point when the letters PQR follow each other in the counterclockwise or positive order ; negative, when they follow in the negative or clockwise order (Fig. 14).

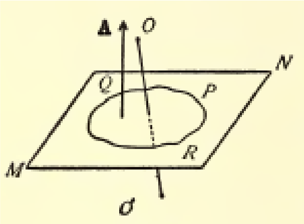


FIG. 14.

面の定義

Application of the theory of reciprocal systems to the solution of scalar and vector equations of the first degree in an unknown vector. **<u>The vector equation of a plane</u>** is

平面の方程式

$$\mathbf{r}\text{-}\mathbf{A} = \mathbf{a}. \quad (36)$$

Applications of the methods developed in Chapter II., to the **<u>treatment of a system of forces acting on a rigid body</u>** and in particular to the reduction of any system of forces to a single force and a couple of which the plane is perpendicular to that force. Application of the methods to the treatment of instantaneous motion of a rigid body obtaining

剛体に作用する力の取り扱い

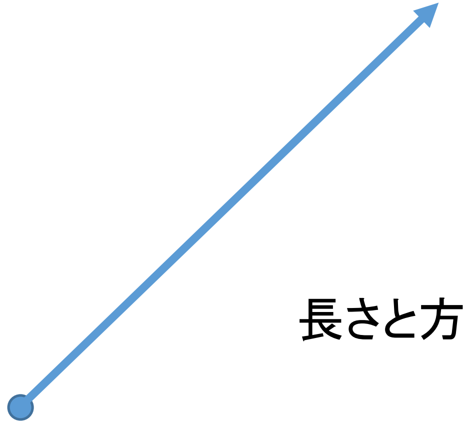
$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{a} \times \mathbf{r} \quad (46)$$

where v is the velocity of any point, v a translational velocity in the direction a, and a the vector angular velocity of rotation.

Further application of the methods to obtain the conditions for equilibrium by making use of the principle of virtual velocities. Applications of the method to obtain the relations which exist between the nine direction cosines of the angles between two systems of mutually orthogonal axes. **<u>Application to special problems in geometry including the form under which plane coordinates make their appearance in vector analysis</u>** and the method by which planes (as distinguished from finite plane areas) may be represented by vectors.

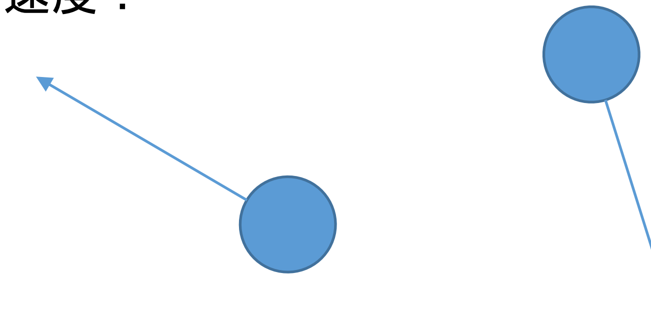
平面座標をベクトルで表記した特別な幾何学の問題

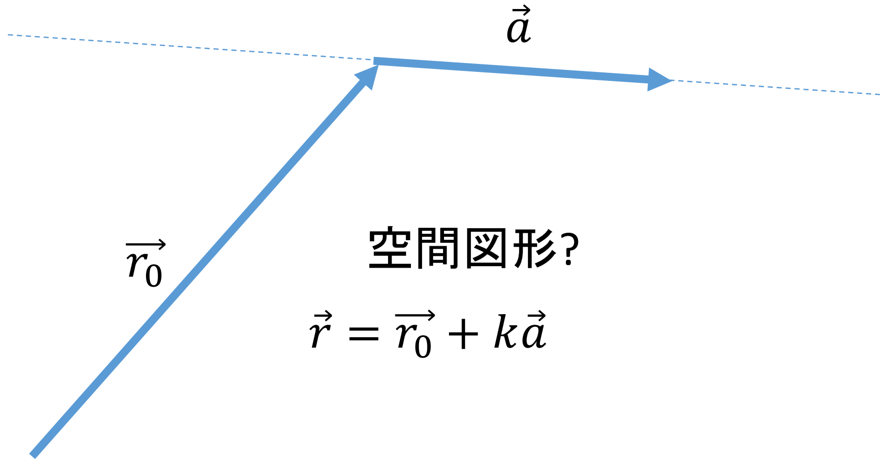
ベクトルとは何？



長さと方向を持っている矢印？

速度？

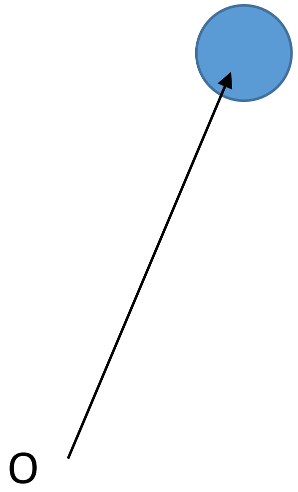


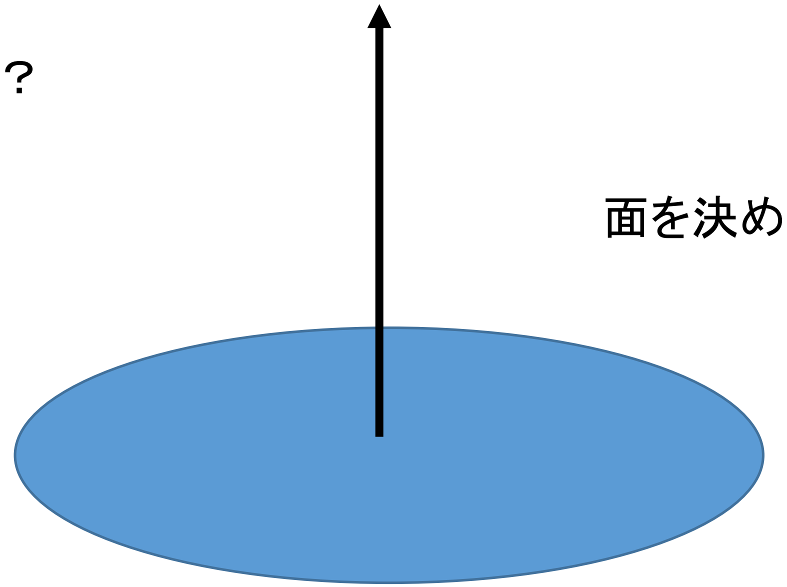


空間図形?

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + k\vec{a}$$

位置を決める？

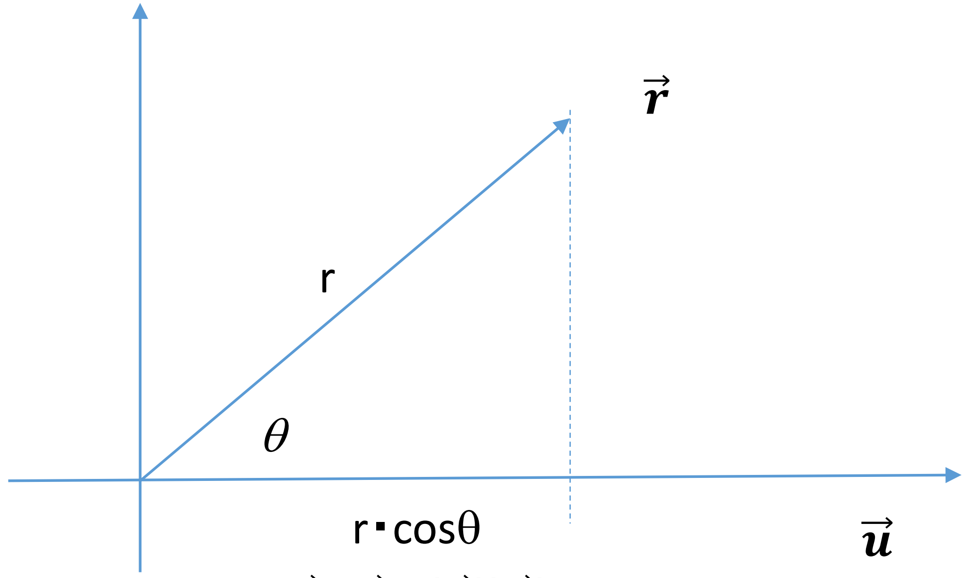




面を決める？

ベクトルの演算

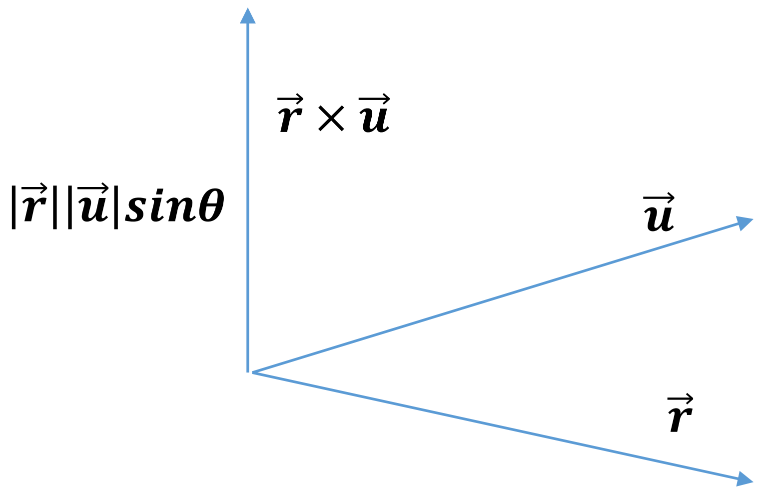
内積



$$\vec{r} \cdot \vec{u} = |\vec{r}||\vec{u}|\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 u_1 \\ r_2 u_2 \\ r_3 u_3 \end{pmatrix}$$

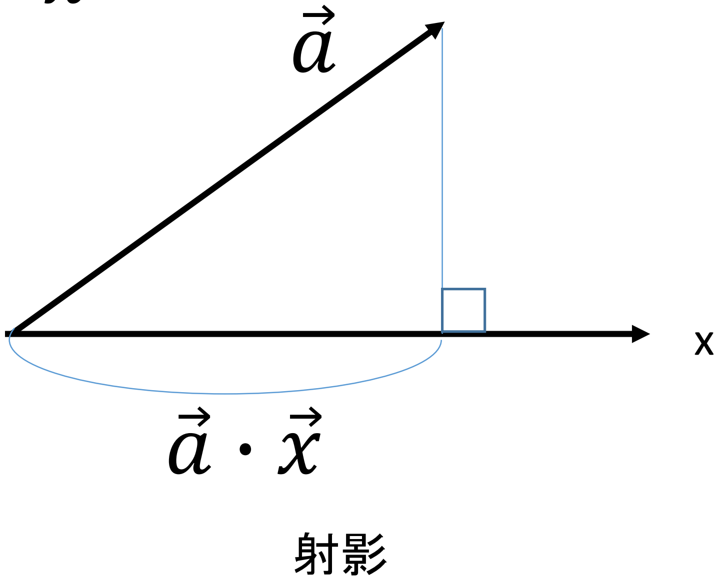
外積



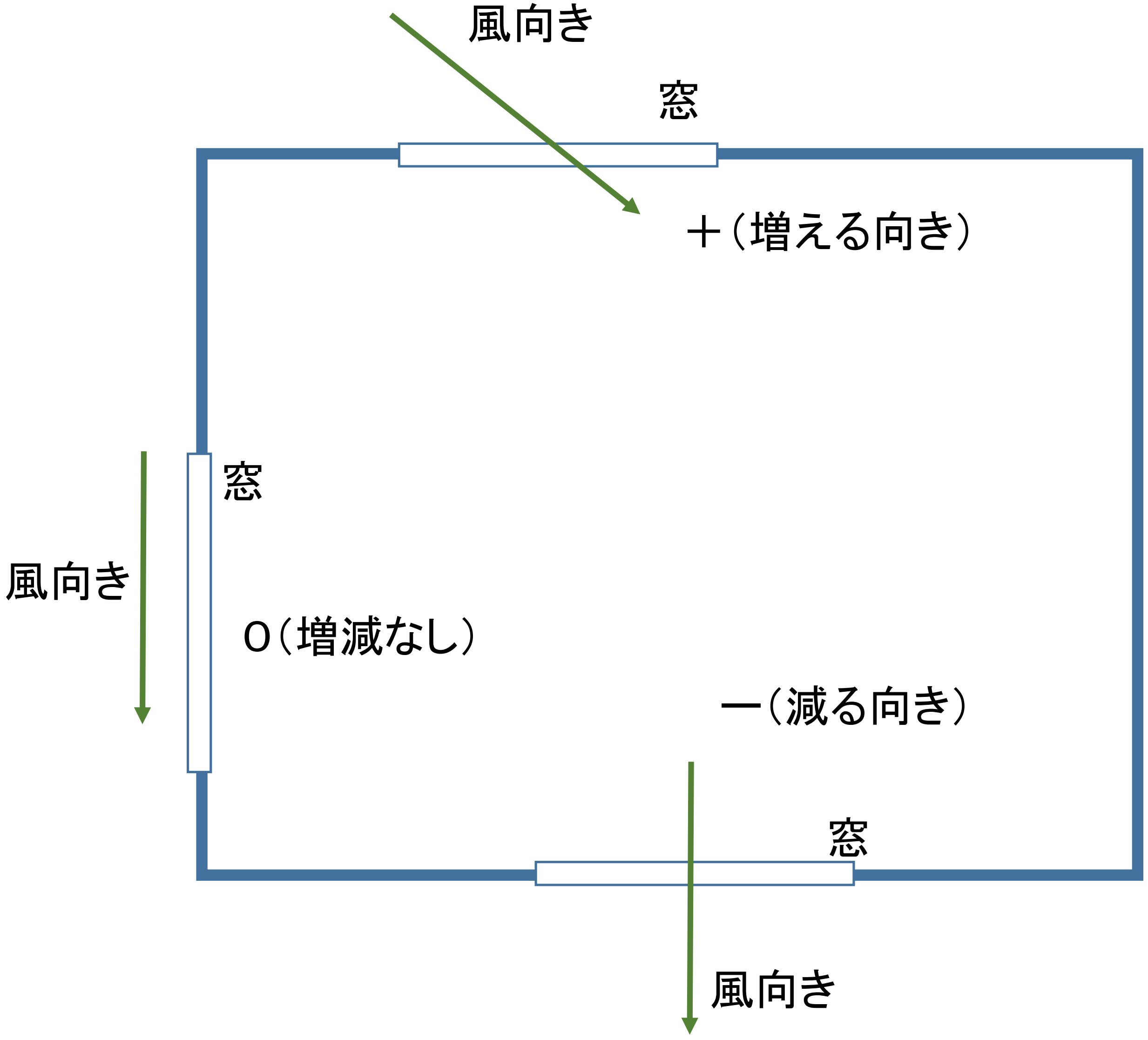
$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 u_3 - r_3 u_2 \\ r_3 u_1 - r_1 u_3 \\ r_1 u_2 - r_2 u_1 \end{pmatrix}$$

例えば内積の意味は？

$\vec{a}\cdot\vec{x}$

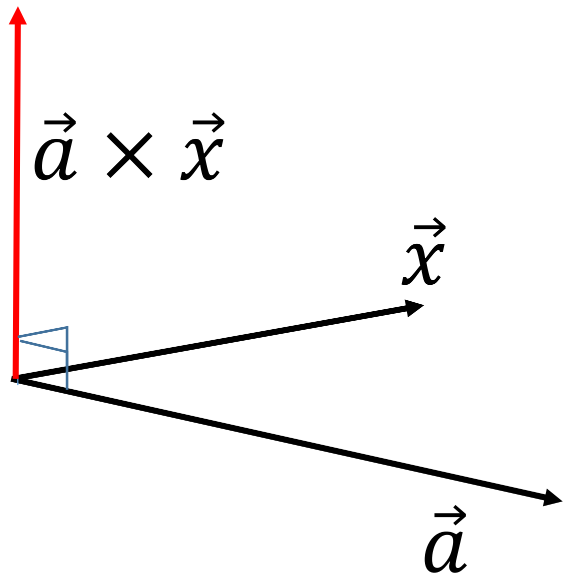


同じ風（ベクトル）でも家の中への効果が違う

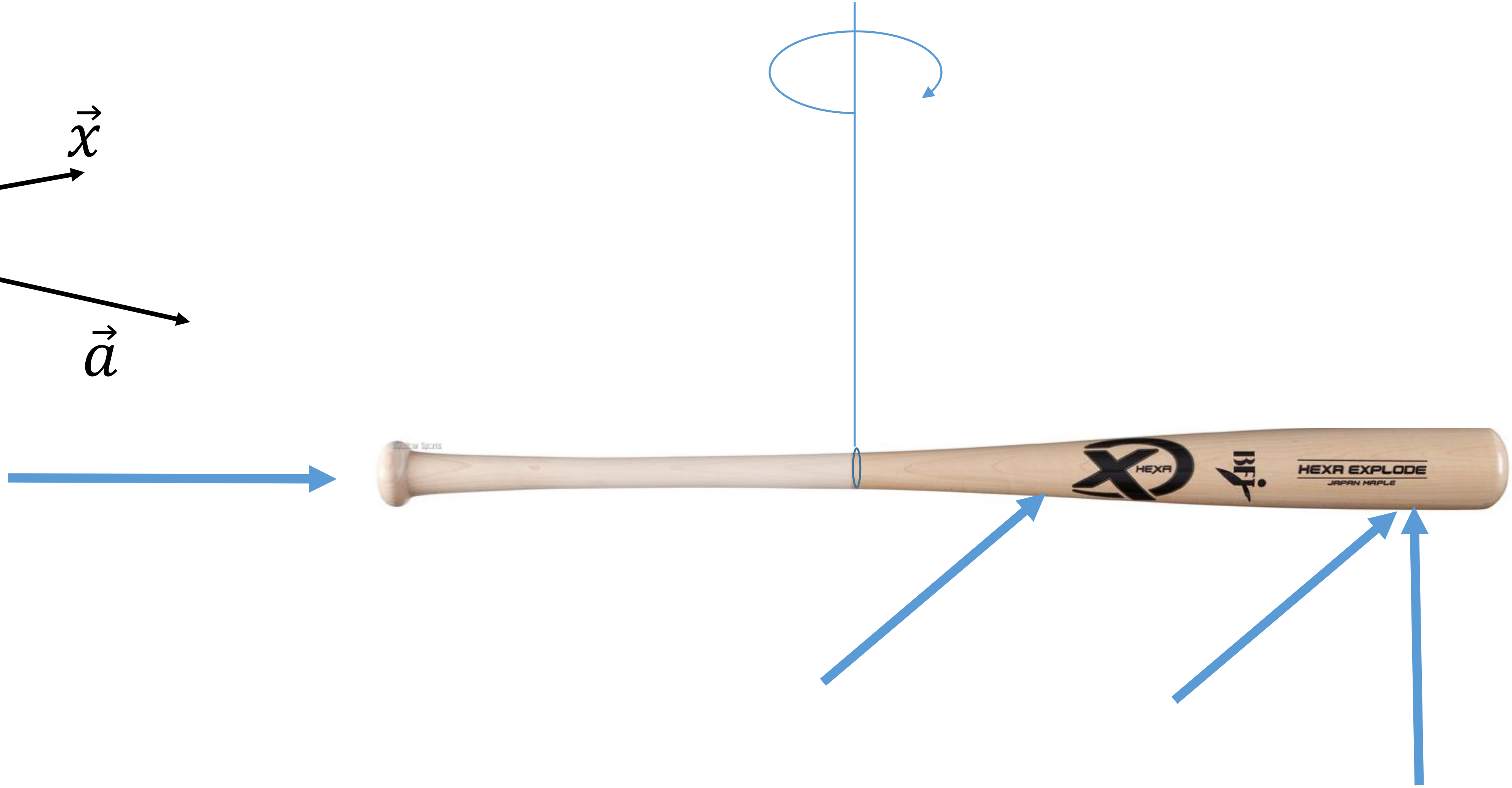


例えば、外積の意味は？

$$\vec{a} \times \vec{x}$$

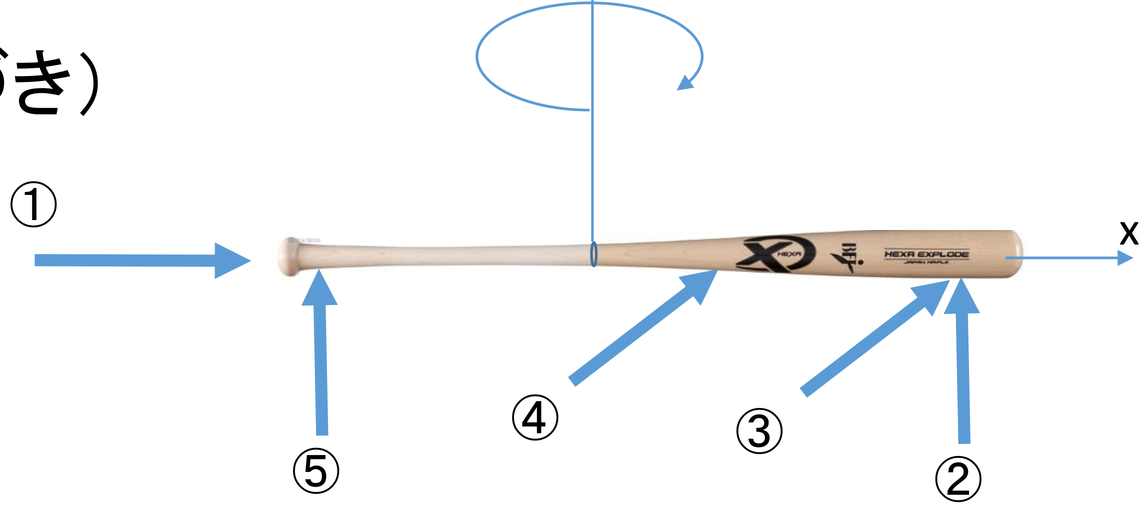


バットを回そうと思ったら

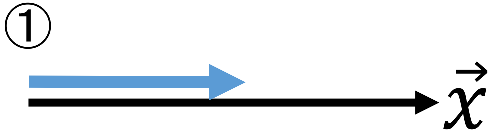


外積(つづき)

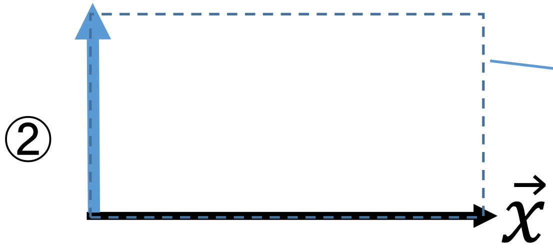
$\vec{a} \times \vec{x}$



①は効力0
②は最も有効
③は同じ点を押しても②より弱い
④は同じ力でも③より弱い
⑤は②と位置も力も同じだけど回転方向が逆

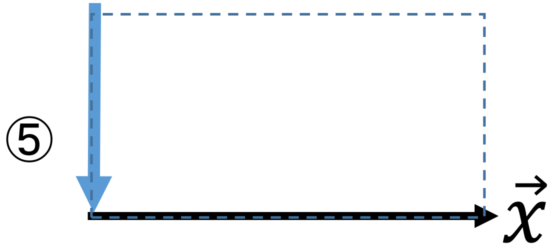


$\vec{x} \times \overrightarrow{①} = 0$



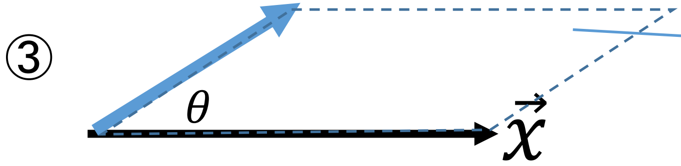
面積

$\vec{x} \times \overrightarrow{②} = max = |\vec{x}|\left|\overrightarrow{②}\right|$



$\vec{x} \times \overrightarrow{⑤} = -|\vec{x}|\left|\overrightarrow{⑤}\right|$

回転方向が反対

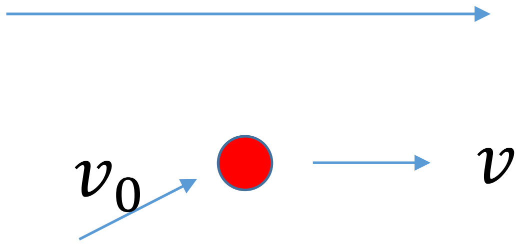


面積

$\vec{x} \times \overrightarrow{③} = |\vec{x}|\left|\overrightarrow{③}\right| \sin\theta$

電磁気学への応用ではベクトルがいっぱい

電場 $\vec{E}$

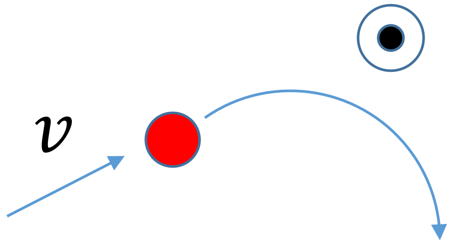


$$\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{q}\vec{\boldsymbol{E}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + q\vec{E}t$$

磁場 $\vec{B}$

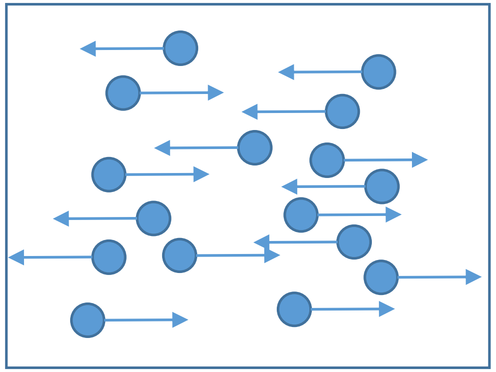


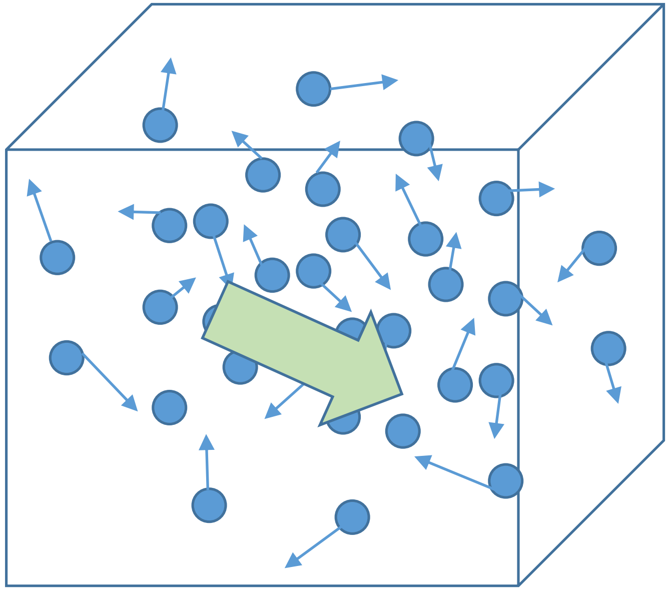
$$\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{q}\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

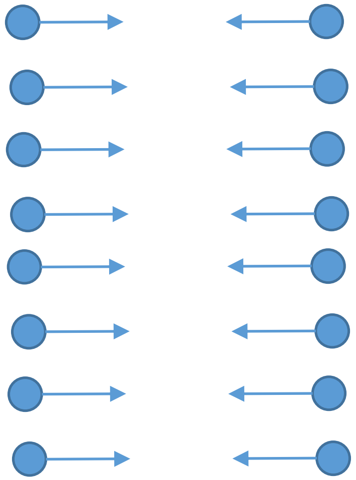
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + q\int \vec{v} \times \vec{B}dt$$

多次元空間を表すという考え　（積分）







流れは
V+ = V-
u = 0

$$\int \vec{v} f(\vec{v}) d\mathbf{v} = \vec{u}$$

ベクトル量を積分？

スカラー　＝＞　ベクトル　　＝＞　テンソル （行列）

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3$$

$$y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3$$

$$y_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

連立方程式

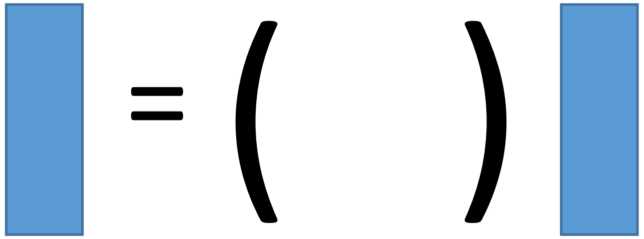
線形代数
線形応答？

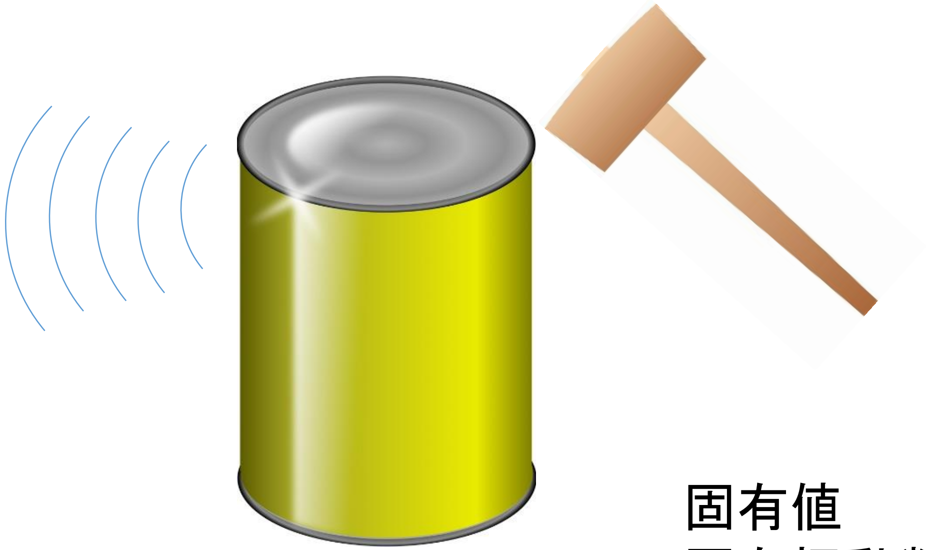
質点　＝＞　平面　＝＞　立体

対角、非対角要素の意味

$$\begin{pmatrix}\text{みかんの値段}\\\text{リンゴの値段}\\\text{バナナの値段}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boxed{\text{みかんの単価}} & \boxed{\begin{matrix}\text{みかんにリンゴを}\\\text{混ぜた時の下がる金額}\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\text{みかんにバナナを}\\\text{混ぜた時の下がる金額}\end{matrix}}\\ \boxed{\begin{matrix}\text{リンゴにみかんを}\\\text{混ぜた時の下がる金額}\end{matrix}} & \boxed{\text{リンゴの単価}} & \boxed{\begin{matrix}\text{リンゴにバナナを}\\\text{混ぜた時の下がる金額}\end{matrix}}\\ \boxed{\begin{matrix}\text{バナナにみかんを}\\\text{混ぜた時の下がる金額}\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\text{バナナにりんごを}\\\text{混ぜた時の下がる金額}\end{matrix}} & \boxed{\text{バナナの単価}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{みかんの個数}\\\text{リンゴの個数}\\\text{バナナの個数}\end{pmatrix}$$

行列の応答式？





固有値
固有振動数

時間に依存しない
シュレディンガー方程式
量子力学

$$\mathrm{H}\varphi(\mathbf{r}) = \varepsilon\varphi(\mathbf{r})$$

行列

ベクトル

スカラー

固有値

以下のベクトル式は解ける？

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad ax + by + cz$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

行列と考えてみれば？

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} = a_{ji}b_{kj}$$

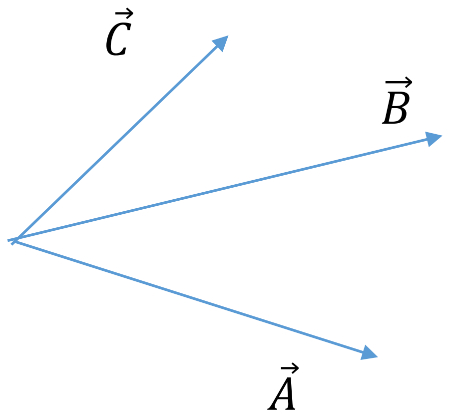
$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \end{pmatrix}$$

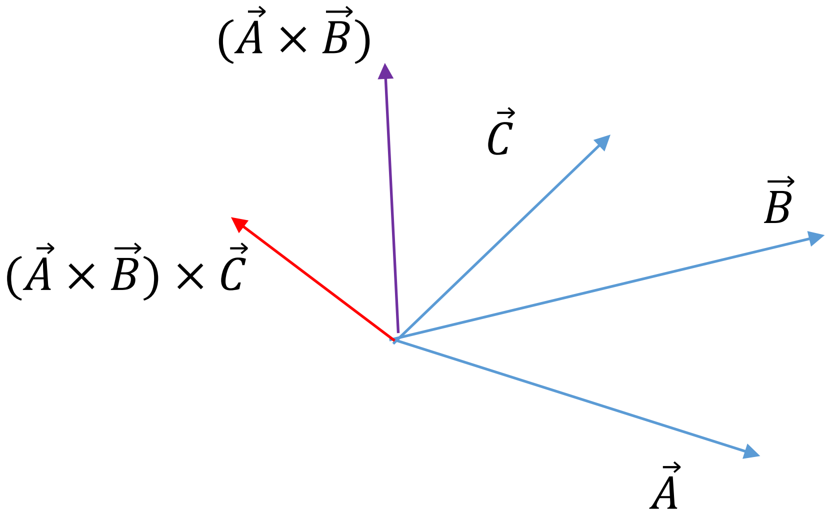
$\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

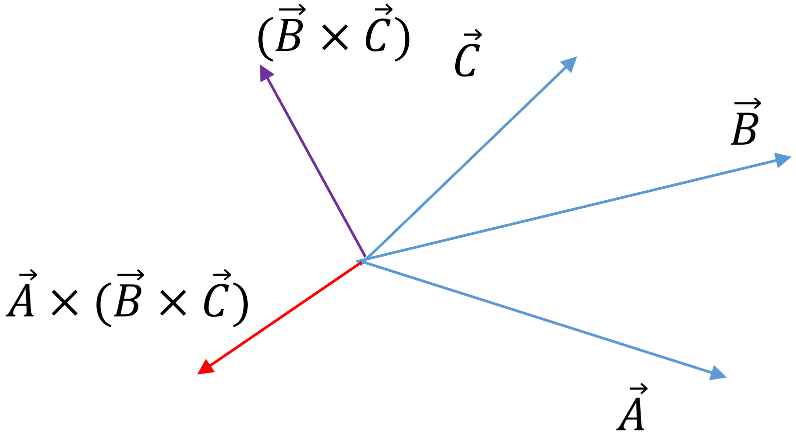
$$\vec{A} \times \vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

たすき掛け　覚えましょう

$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ と $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ は同じか？







$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\ (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_1c_2 - b_2c_1)a_2 - (b_3c_1 - b_1c_3)a_3 \\ (b_2c_3 - b_3c_2)a_3 - (b_1c_2 - b_2c_1)a_1 \\ (b_3c_1 - b_1c_3)a_1 - (b_2c_3 - b_3c_2)a_2 \end{pmatrix}$$

ベクトル三重積

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

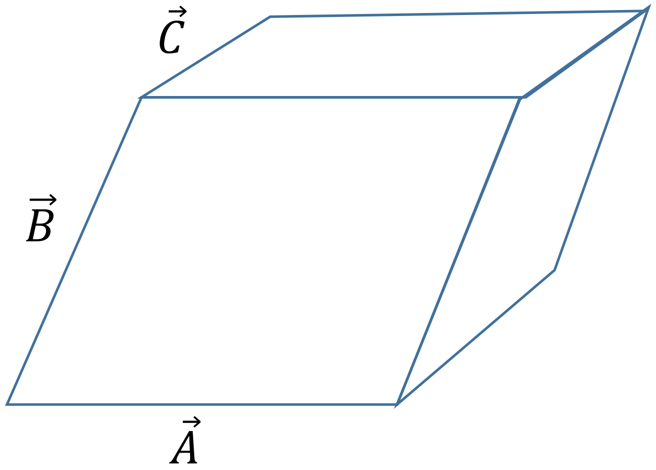
$$(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$$

$$(A \times B) \times C = -C \times (A \times B) = -(C \cdot B)A + (C \cdot A)B$$

スカラー三重積

$$A \cdot B \times C = B \cdot C \times A = C \cdot A \times B$$

どっちから（内積？外積？）やるの？



の体積

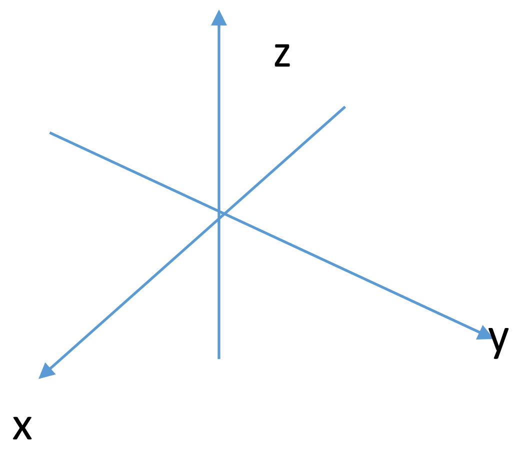
$$A \cdot B \times C = \begin{vmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix}$$

行列式

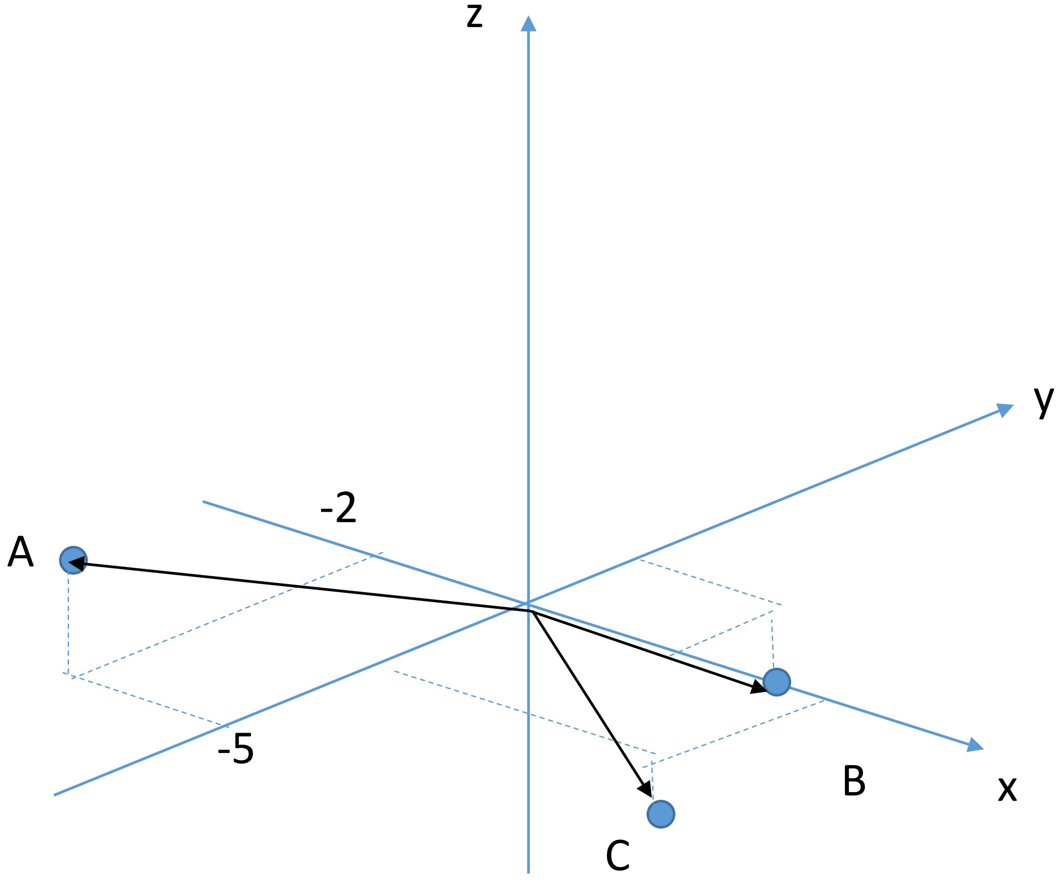
$$\begin{vmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix}$$

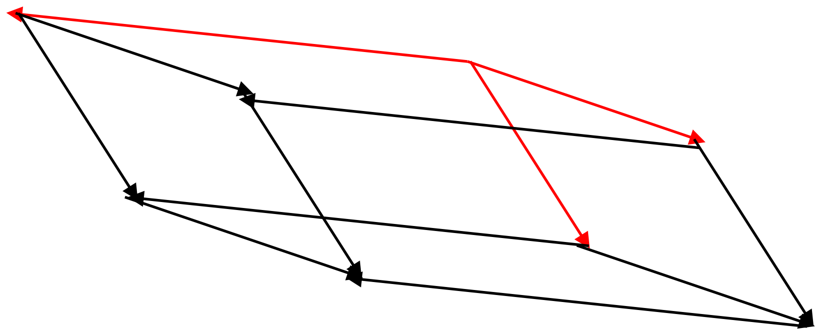
ベクトルの確認問題

[1]　3つのA(-2, -5, 1)、B(2, 1, -1), C(3, -2, 1)　A, B, Cベクトルで作られる平行６面体を図示しなさい。そして、その体積を計算しなさい。



[1] 3つのA(-2, -5, 1)、B(2, 1, -1), C(3, -2, 1)　A, B, Cベクトルで作られる平行６面体を図示しなさい。そして、その体積を計算しなさい。



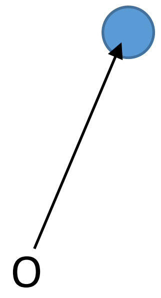


$$A\cdot B\times C = B\cdot C\times A = C\cdot A\times B$$

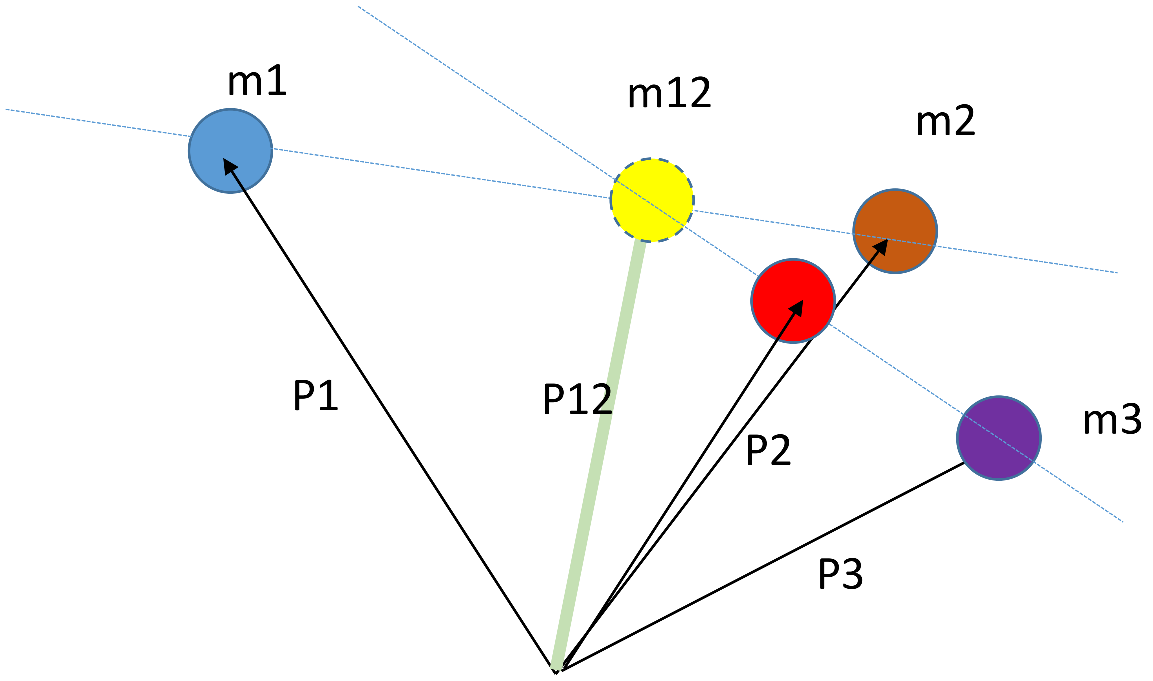
外積は面積
内積はcos θ 分

ベクトルの確認問題

[2] 位置ベクトル 3つのA(-2, -5, 1)、B(2, 1, -1), C(3, -2, 1)に質量がそれぞれ1,　2、３ が置いてある場合、その重心位置を求めなさい。２つの質点を図示して見ること。



[2] 位置ベクトル 3つのA(-2, -5, 1)、B(2, 1, -1), C(3, -2, 1)に質量がそれぞれ1, 2、3 が置いてある場合、その重心位置を求めなさい。２つの質点を図示して見ること。



重み付

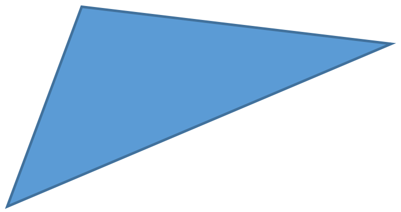
$$\overrightarrow{OX} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{P_i}}{\sum m_i} = \frac{1\begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}{1+2+3} = \frac{\begin{pmatrix}11\\-9\\2\end{pmatrix}}{6}$$

$$\overrightarrow{P12} = \frac{1\begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}{1+2} = \frac{\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}}{3}$$

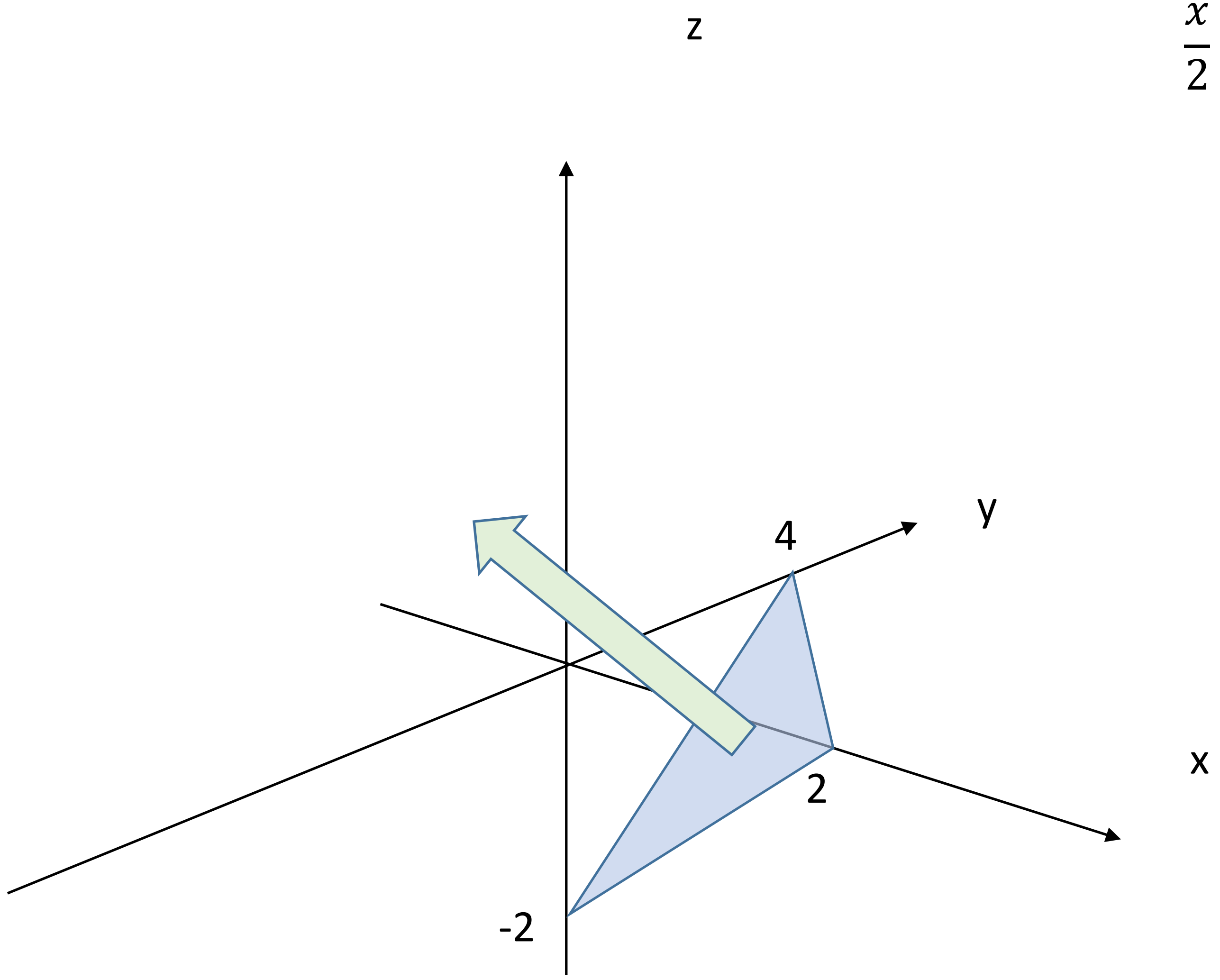
$$\overrightarrow{P123} = \frac{\frac{1+2}{3}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}{1+2+3} = \frac{\begin{pmatrix}11\\-9\\2\end{pmatrix}}{3}$$

ベクトルの確認問題

[3]　x切片が２、y切片が4、z切片が-2の時の平面に垂直なベクトルを求めなさい。図示してみること。



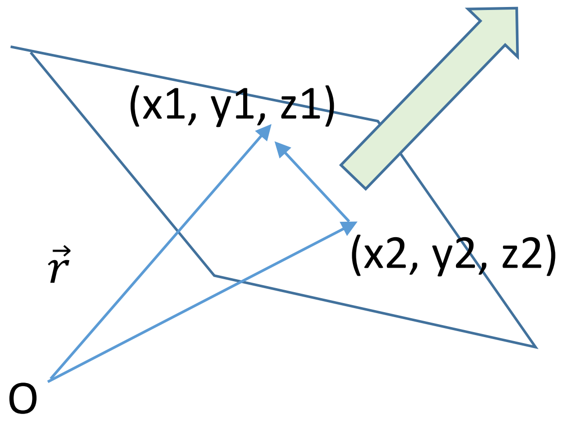
[3]　x切片が２、y切片が4、z切片が-2の時の平面に垂直なベクトルを求めなさい。図示してみること。



$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-2}=1$$

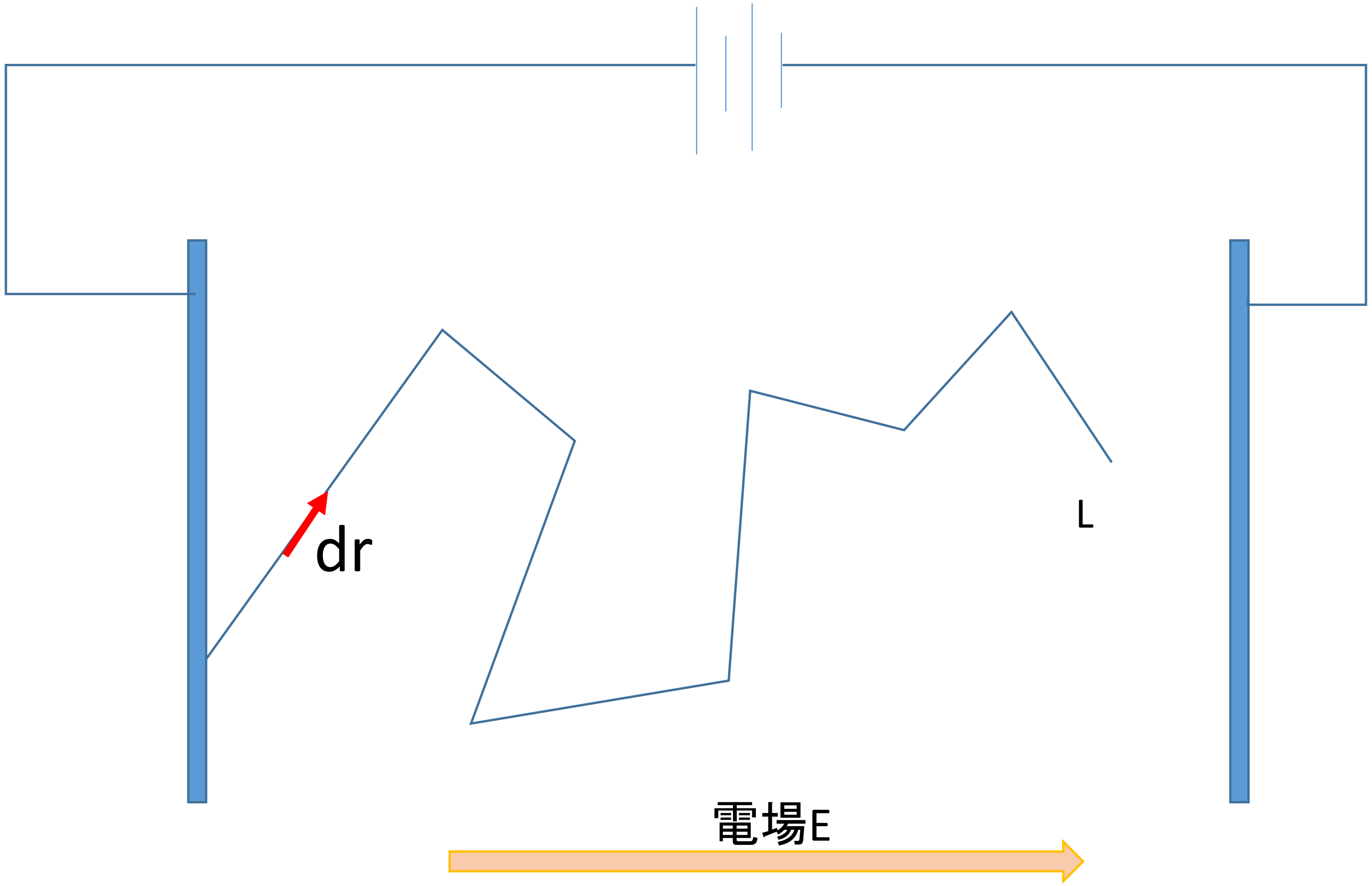
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}=1$$

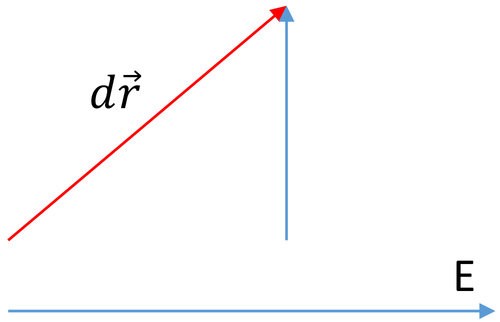
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}=0$$



次は、ベクトルの微分、積分

なぜベクトルの微分や積分の必要性





$$F = e\vec{E}$$

$$\Delta\phi = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\phi = \int_L F \cdot d\vec{r}$$