応用数学　Ａ

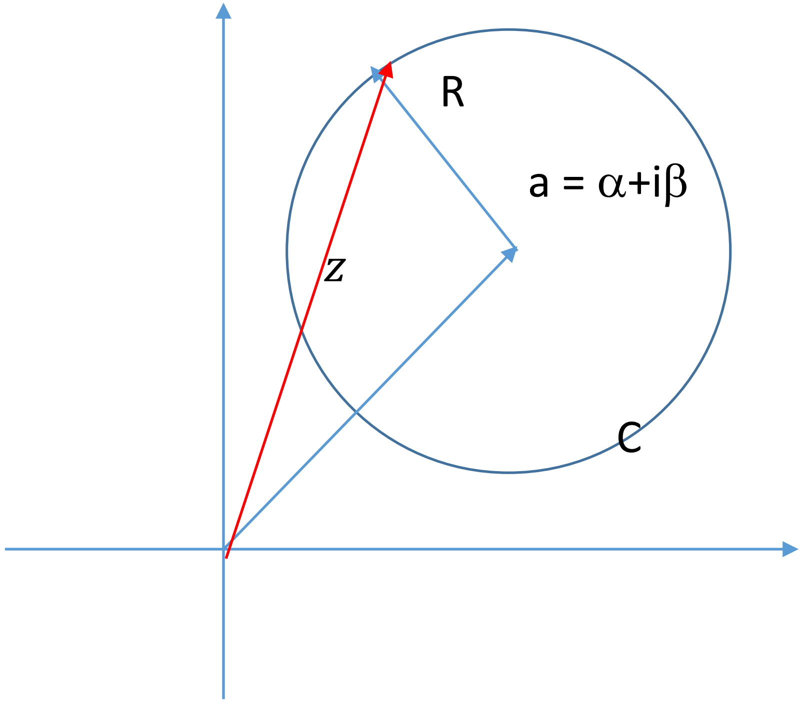
留数と特異点

先週

媒介変数を考える＋複素空間をベクトル（実部、虚部）で考える

例1 $\oint_C \frac{dz}{z-a}$ 　 $x = \alpha + R\cos\varphi\,, y = \beta + R\sin\varphi$ 　 $z = a + Re^{i\varphi},\ z' = \frac{dz}{d\varphi} = Rie^{i\varphi}$

cはこの円周、媒介変数はφ

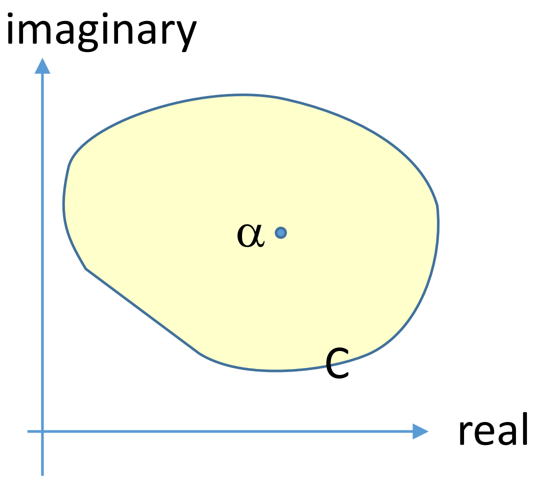


$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} d\varphi = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$$

先週

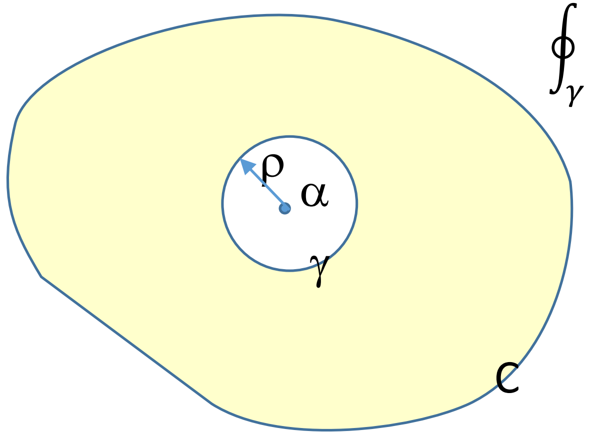
f(z)がC内および境界で解析的であるとき、



$$\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$$

を考える



例1より

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}}d\varphi = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

$$\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz = \oint_\gamma \frac{1}{z-\alpha}dz$$

複数境界のコーシーの定理から

$$\int_C \varphi(\zeta)d\zeta = \oint_\gamma \varphi(\zeta)d\zeta \qquad |\varphi(\zeta)| < K$$

$$\left|\oint_\gamma \varphi(\zeta)d\zeta\right| \leq 2\pi\rho K$$

ρ->0でこの積分は0に　=>

$$\int_C \varphi(\zeta)d\zeta = 0 = \int_C \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\underbrace{\int_C \frac{1}{\zeta-z}d\zeta}_{2\pi i} = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

=> コーシーの積分公式

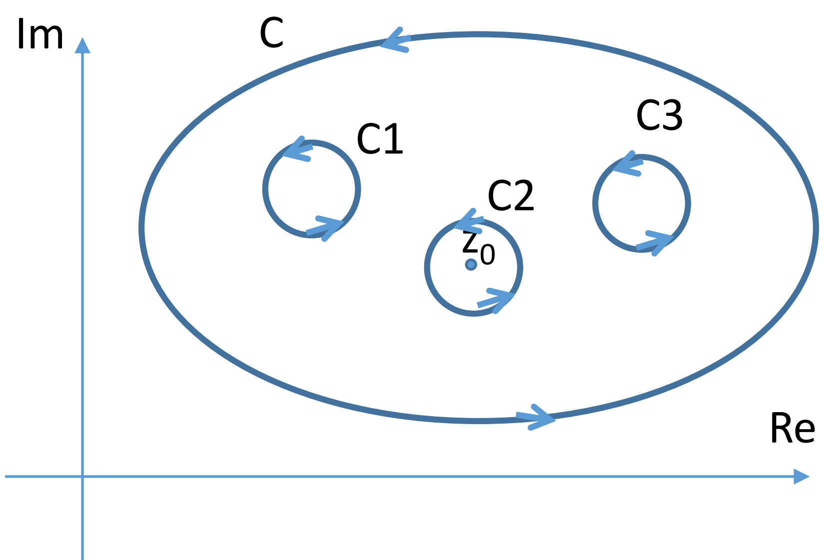
コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

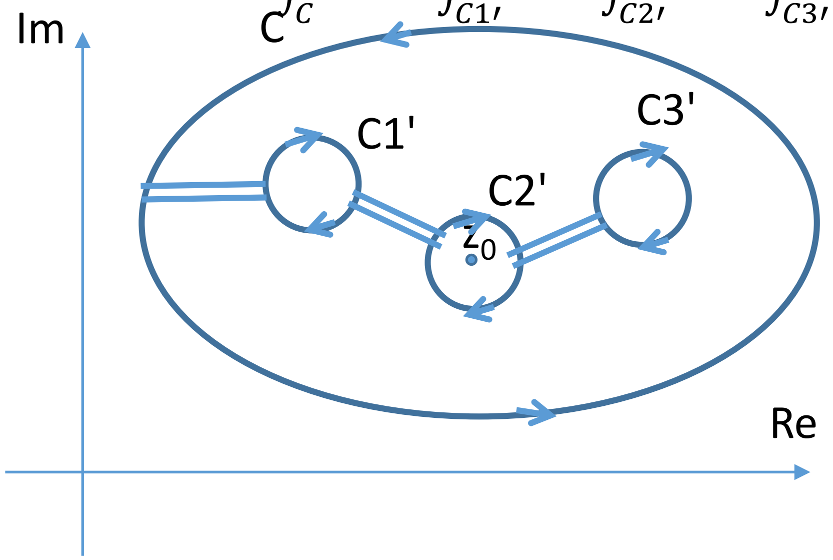
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

複数境界

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \oint_{C1} \frac{f(z)}{z - z_0}dz + \oint_{C2} \frac{f(z)}{z - z_0}dz + \oint_{C3} \frac{f(z)}{z - z_0}dz + \cdots$$



$$\oint_C dz + \oint_{C1'} dz + \oint_{C2'} dz + \oint_{C3'} dz + \cdots = 0$$

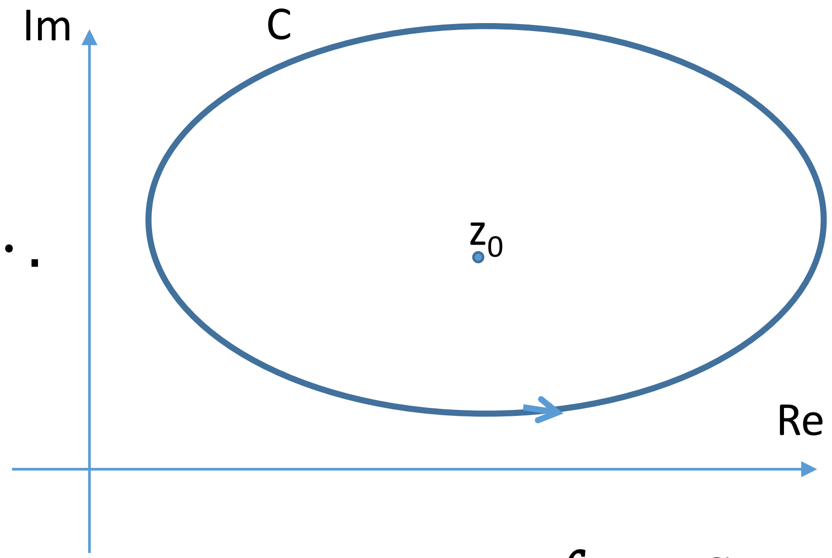


コーシーの積分定理:テーラー展開を使う方法

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0\ )^n=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0\ )^2+a_3(z-z_0\ )^3\dots$$

テーラー展開

$$\frac{f(z)}{z-z_0}=\frac{a_0}{z-z_0}+a_1+a_2(z-z_0\ )\ \ +a_3(z-z_0\ )^2+\cdots.$$



$$\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_C\frac{a_0}{z-z_0}dz+\oint_C\underbrace{[a_1+a_2(z-z_0\ )\ \ +a_3(z-z_0\ )^2}_{=0}+\cdots]dz=\oint_C\frac{a_0}{z-z_0}dz$$

$$=a_0\oint_C\frac{1}{z-z_0}dz=2\pi i a_0=2\pi i f(z_0)$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

微分すると

$$f'(z_0) = \frac{d}{dz_0}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d}{dz_0}\frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$f''(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d}{dz_0}\frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{2\, f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

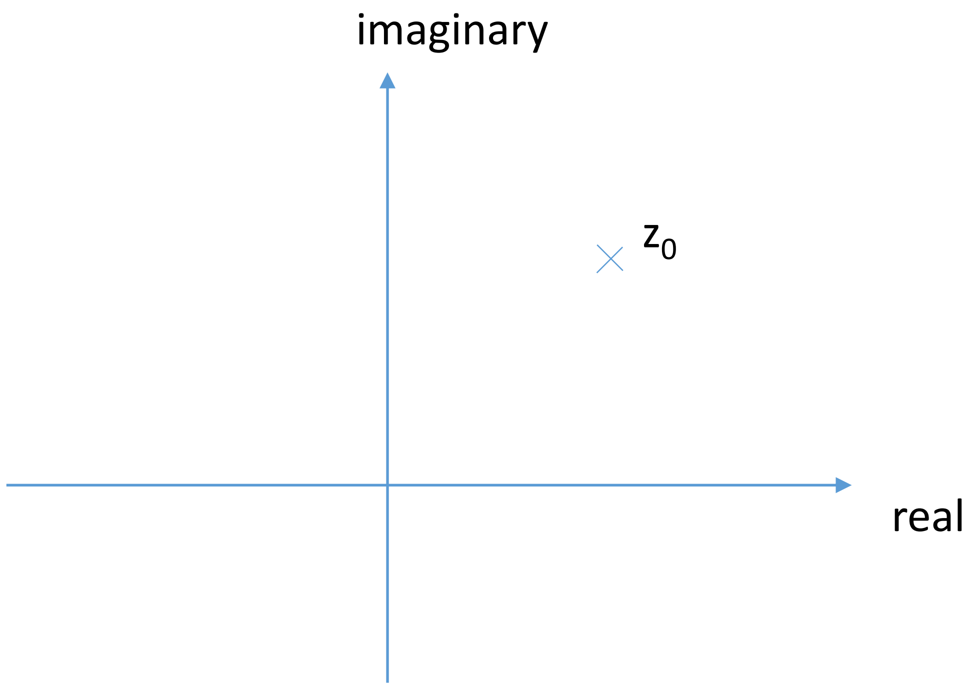
$$f'''(z_0) = \frac{1 \cdot 2}{2\pi i}\int_C \frac{d}{dz_0}\frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz = \frac{1 \cdot 2}{2\pi i}\int_C \frac{3\, f(z)}{(z - z_0)^4} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

留数とローラン展開

孤立特異点

複素関数f(z)が z_0 で正則ではなく、z_0 の近傍では正則であるときのz_0



この時、$(z-z_0)^n f(z)$で特異点が消えてしまう場合、n位の極という

テーラー展開

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 +$$

$f(x_0)$が正則でないと適用できない。

ローラン展開

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad , c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0\ )^{n+1}} dz$$

ローラン展開

Laurent

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad ,c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0\ )^{n+1}}dz$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$\Downarrow$$

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-w}dz$$

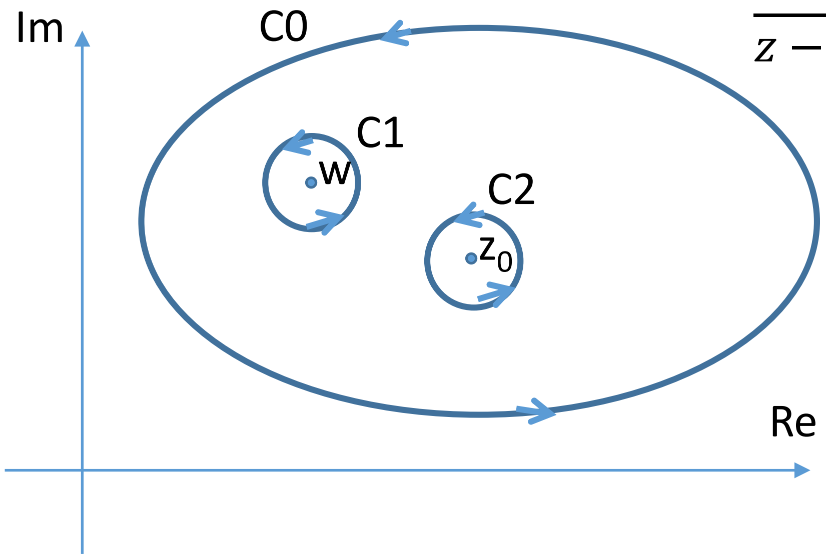
$$\Downarrow$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0\ )^{n+1}}dz\right](w-z_0)^n$$

$$\Downarrow$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C1}\frac{f(z)}{z-w}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C0}\frac{f(z)}{z-w}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C2}\frac{f(z)}{z-w}dz$$



$$\frac{1}{z-w}=\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\boxed{\frac{w-z_0}{z-z_0}}\right)}=\frac{1}{(z-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

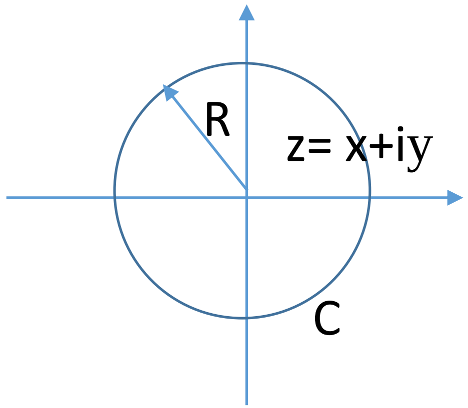
$\boxed{}$ が小さいとして $\quad \dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots..$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C0}\frac{f(z)}{z-w}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C0}\frac{f(z)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\underbrace{\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0\ )^{n+1}}dz}_{c_n}\right](w-z_0)^n$$

例 $\oint_C \frac{dz}{z}$

$x = R\cos\varphi\,, y = R\sin\varphi \qquad z = Re^{i\varphi},\ z' = \frac{dz}{d\varphi} = Rie^{i\varphi}$



Cはこの円周、媒介変数はφ

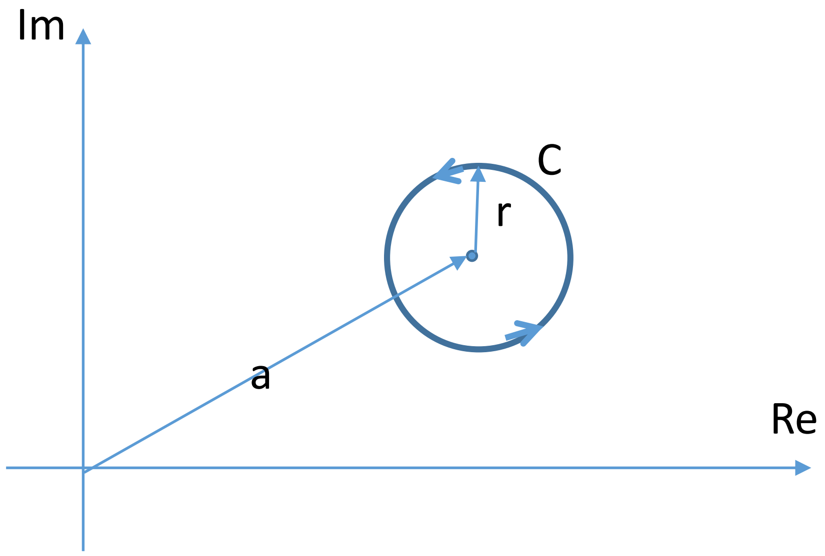
$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} d\varphi = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi}}{R^2e^{i2\varphi}} d\varphi = i\int_0^{2\pi} \frac{1}{R} e^{-i\varphi} d\varphi = \frac{i}{R}\int_0^{2\pi} (\cos\varphi - i\sin\varphi) d\varphi = 0$$

$$\oint_C z^2 dz = 0$$

$$\oint_C z^n dz = \begin{array}{ll} 0 & n \geq 0 \\ 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \leq -2 \end{array}$$

コーシーの積分公式 $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$



特異点

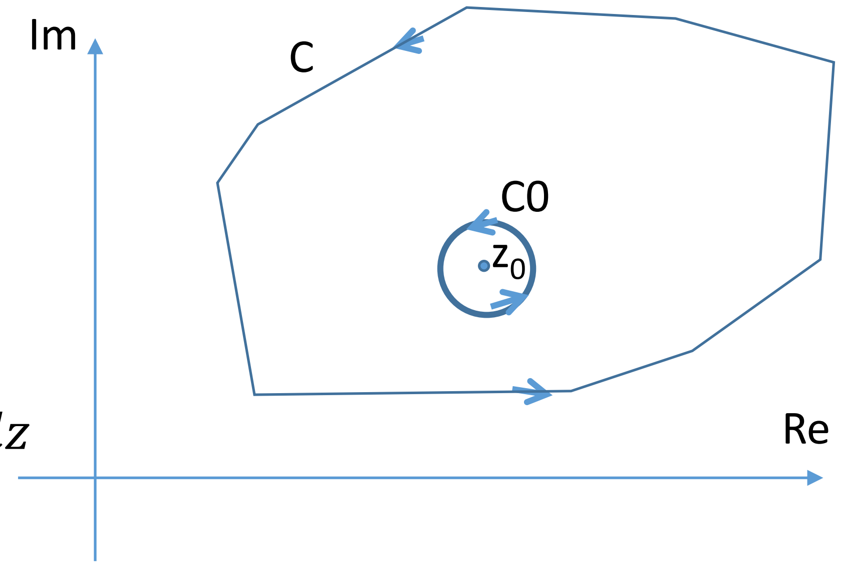
正則でない点

例：有理関数では、分母が0

このとき

$$\int_{|z-a|=r} \frac{1}{(z-a)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

コーシーの積分定理



$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C0} f(z)dz$$

特異点がz_0だけであれば

ローラン展開

$$\oint_{C0} f(z)dz = \oint_{C0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_{C0} c_n(z-z_0)^n dz$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \ , \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$$\int_{|z-a|=r} \frac{1}{(z-a)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_{C0} c_n(z-z_0)^n dz = \cdots + \oint_{C0} \overset{0}{C_{-3}(z-z_0)^{-3}dz} + \oint_{C0} \overset{0}{C_{-2}(z-z_0)^{-2}dz} + \oint_{C0} \overset{2\pi i}{C_{-1}(z-z_0)^{-1}dz}$$

$$+ \oint_{C0} C_0(z-z_0)^0 dz + \oint_{C0} C_1(z-z_0)^1 dz + \cdots.. \qquad = 2\pi i C_{-1}$$

正則だから0

留数

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \mathrm{Res}(f, z_0)$$

留数の求め方

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad ,c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0\ )^{n+1}}dz$$

z=aが1位の極である場合、ローラン展開は

$$f(z)=\cdots.+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots.$$

留数は

$$c_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

z=aが2位の極である場合、

$$f(z)=\cdots.\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots.$$

$$(z-a)^2f(z)=\cdots.c_{-2}+\underline{c_{-1}}(z-a)+c_0(z-a)^2+c_1(z-a)^3+\cdots.$$

両辺を微分して

$$((z-a)^2f(z))'=\cdots.+c_{-1}+2c_0(z-a)\quad+3c_1(z-a)^2+\cdots.$$

$$c_{-1}=\lim_{z\to a}\left((z-a)^2f(z)\right)'$$

$$f(z)=\frac{z^3+5}{z(z-1)^3}$$

Z=0、1で特異点

z＝0　１位の極

$$Res(f,0)=\lim_{z\to 0} z\frac{z^3+5}{z(z-1)^3} \quad =-5$$

z＝1　3位の極 $Res(f,1)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\frac{z^3+5}{z(z-1)^3}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^3+5}{z}\right)$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\frac{d}{dz}\left(\frac{2z^3-5}{z^2}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\left(\frac{2z^4+10z}{z^4}\right) \quad =6$$

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$$ z=0　3位の極

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z)^3 \frac{\cos z}{(z)^3} \right)$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} (-1) = -\frac{1}{2}$$

$f(z) = \cot z$　z=0　1位の極?

$$\lim_{z \to 0} z f(z) =$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z - 4}$$ の極と位数、およびその極での留数

$$\frac{1}{z^2 + 3z - 4} = \frac{1}{(z-1)(z+4)}$$ $z = 1, -4$ で1位の極

$$z = 1, \qquad \mathrm{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1}{(z-1)(z+4)} = \frac{1}{5}$$

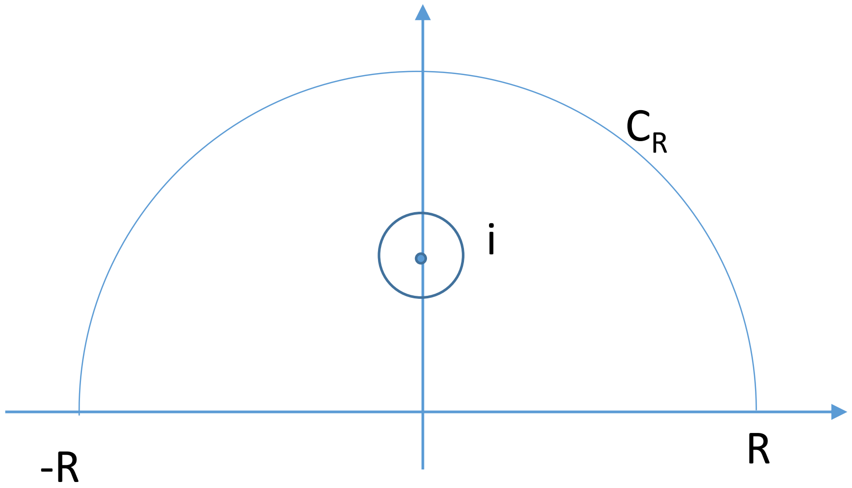
$$z = -4, \qquad \mathrm{Res}(f, -4) = \lim_{z \to -4} (z+4) \frac{1}{(z-1)(z+4)} = -\frac{1}{5}$$

留数の応用

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

$z = \pm i$に1位の極

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=\varepsilon} \frac{1}{z^2+1}dz = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z \quad + i} = \frac{1}{2i}$$



積分区間を複素空間のr=Rの半円だとすると

$$\oint_{C_R} \frac{1}{z^2+1}dz + \oint_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1}dx - \oint_{|z-i|=\varepsilon} \frac{1}{z^2+1}dz = 0$$

$$\oint_{C_R} \frac{1}{z^2+1}dz + \oint_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1}dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f,i) = \pi$$

実際は

$$\oint_{C_R} \frac{1}{z^2+1}dz \Rightarrow 0 \ \ for\ R \Rightarrow \infty$$

$$\oint_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1}dx \Rightarrow \pi \ \ for\ R \Rightarrow \infty$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1} x$$