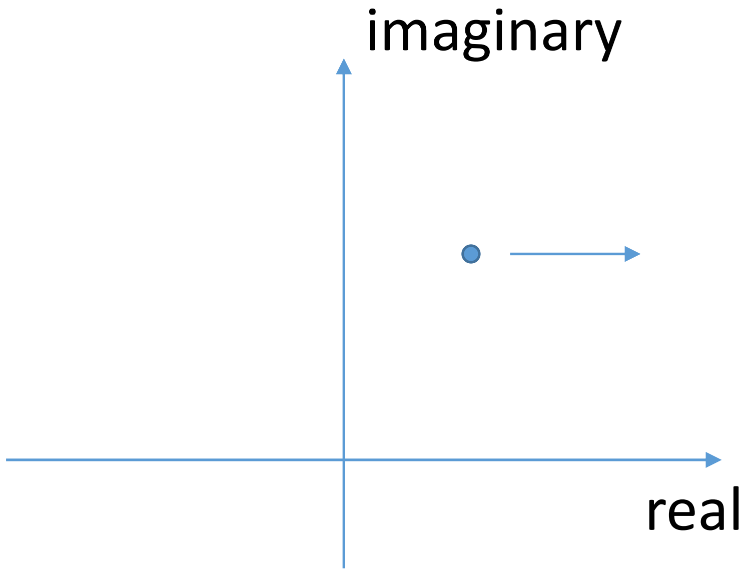
複素関数論の応用

コーシー・リーマン

複素数では？　$z = x + iy$　$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 複素数の関数



複素数での増減

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) \qquad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

実部の増減

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x,y)$$

虚部の増減

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x,y)$$

1．変化がReal に沿った場合　$\Delta z = \Delta x$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x} \to \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

2．変化がImaginary に沿った場合　$\Delta z = \Delta y$

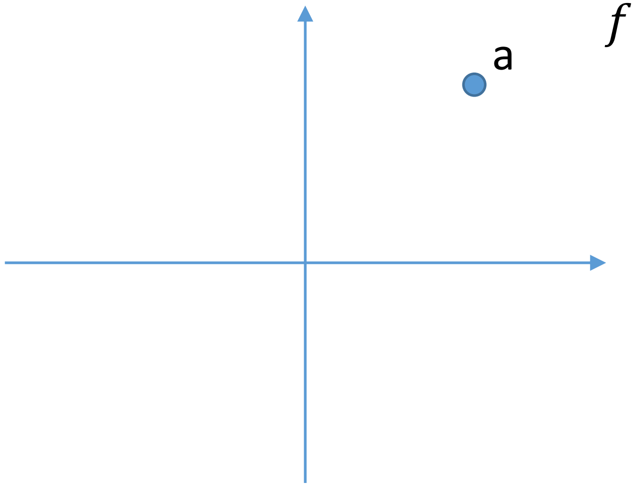
$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y} \to \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

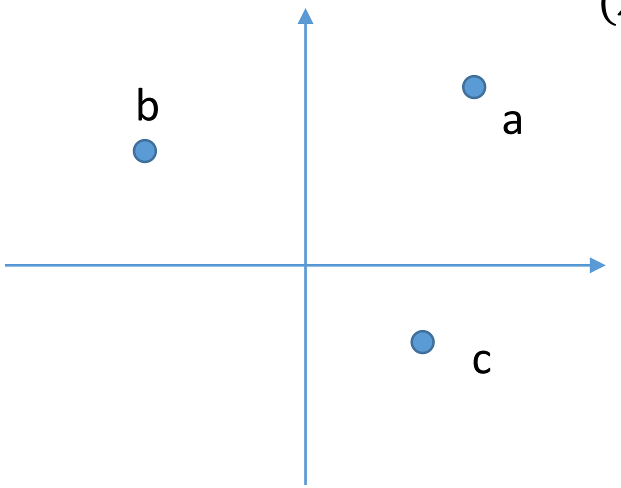
であるならば、微分可能　正則

コーシー・リーマンの条件

孤立特異点

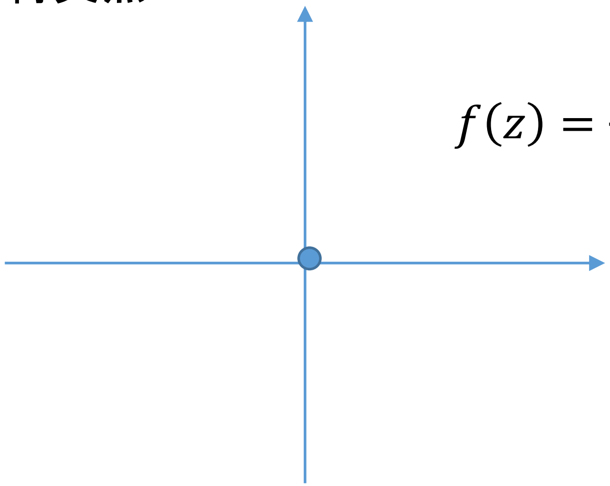


$$f(z) = \frac{1}{z - a}$$



$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}$$

孤立でない特異点



$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$$

$$z = \frac{1}{n\pi}$$

nが∞に近づくとz=0の周りに無限に特異点が生じる

留数の次数の判定

$$f(z)=\frac{1}{\sin z}$$

1つ特異点は$z=0$

$$\lim_{z\to 0}(z)\frac{1}{\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos z}=1$$

zの１次をかけて特異点に近づくと有限値をとる
＝＞１次の特異点

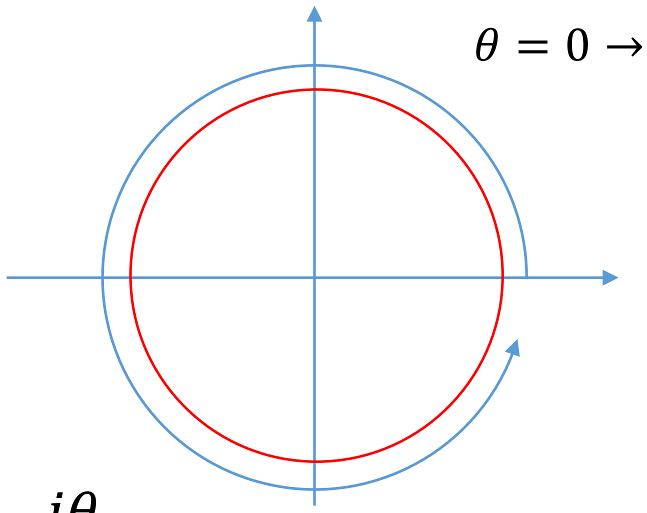
$$\sin z=0 \quad at\ z=n\pi$$

$$\lim_{z\to n\pi}\frac{(z-n\pi)}{\sin z}=\lim_{z\to n\pi}\frac{1}{\cos z}=(-1)^n$$

z=nπのいずれの特異点も1次

実関数＝＞複素関数を利用して解く

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \qquad (a>1)$$



$\theta = 0 \rightarrow 2\pi$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$z = e^{i\theta}$$

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \oint \frac{dz/iz}{a+\frac{1}{2}(z+z^{-1})} = \frac{2}{i}\oint \frac{dz}{z^2+2az+1} = \frac{2}{i}\oint \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

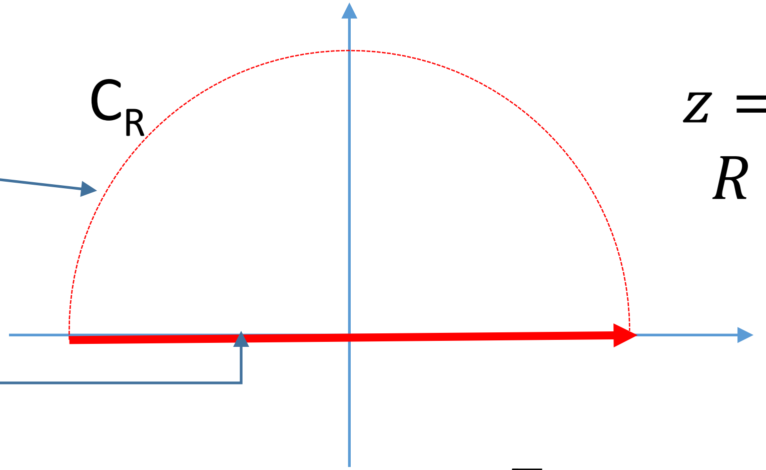
$$\alpha,\beta \quad = -a \pm \sqrt{a^2-1}$$

単位円の中にあるのはαだけ

$$\frac{2}{i}\oint \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{2}{i}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}, \qquad z=\alpha\right) = \frac{2}{i}\frac{2\pi i}{(\alpha-\beta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

有利関数の無限大への積分への応用

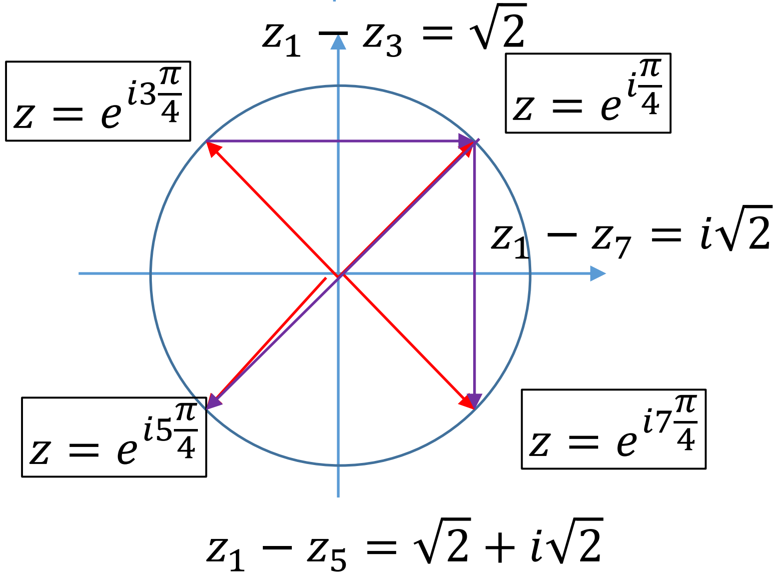
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$$



$z = Re^{i\theta}$

$R \to \infty$

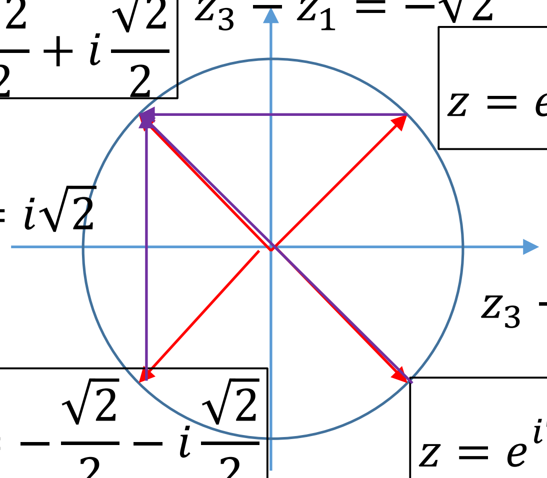
$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = \int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+1} + \int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}$$



$z^4 = -1$が特異点＝＞4回回って z=-1になる。

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, z=\omega\right) = \lim_{z\to\omega}\frac{(z-\omega)}{(z-\omega)(z-\omega^3)(z-\omega^5)(z-\omega^7)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)i\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)} = \frac{-(1+i)}{4\sqrt{2}} = -\frac{\omega}{4}$$



$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, z = \omega^3\right) = \lim_{z\to\omega^3} \frac{(z-\omega^3)}{(z-\omega)(z-\omega^3)(z-\omega^5)(z-\omega^7)}$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{2}i\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)} = \frac{(1-i)}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4\omega}$$

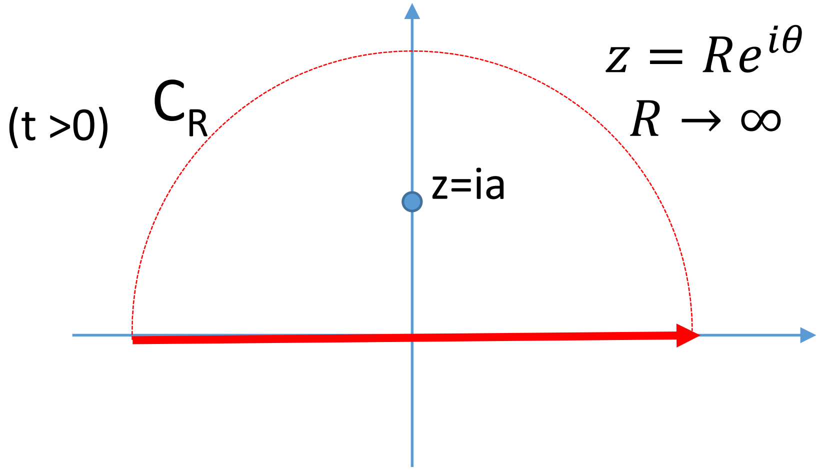
$$\oint \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\frac{-(1+i)}{4\sqrt{2}} + \frac{(1-i)}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1}\right| \le \frac{R}{R^4-1}\int_0^\pi d\theta \to 0 \quad for\ R \to \infty$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} = \oint_C \frac{dz}{z^4+1} - \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Fourier-type積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}$$



$$\int_C \frac{e^{itz}}{z^2+a^2}dz = \int_C \frac{e^{itz}}{(z-ia)(z+ia)}dz = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{itz}}{(z-ia)(z+ia)}, z=ia\right) = 2\pi i\frac{e^{-at}}{2ia} = \frac{\pi}{a}e^{-at}$$

半円の積分は、円弧と弦の足し算なので

$$\int_C \frac{e^{itz}}{z^2+a^2}dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}dx + \underbrace{\int_{C_R}\frac{e^{itz}}{z^2+a^2}}_{=>0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}e^{-at}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx + i\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin tx}{x^2+a^2}}dx = \frac{\pi}{a}e^{-at}$$

t=1 では

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}e^{-a}$$

Fourier-type積分　その２

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a}e^{-at}$$ をd/dtして

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin tx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a}(-a)e^{-at} = -ae^{-at}$$

流体力学

例：2次元で非圧縮、渦無しの流れ

2次元 =>

$$速度関数 v(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

渦度 $$\omega = rot\ v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & v & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & w & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

ここで $$v_x = \frac{\partial v(x,y,t)}{\partial x}$$

ここで、$v = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y)$となる、スカラー関数$\phi$が存在すれば、

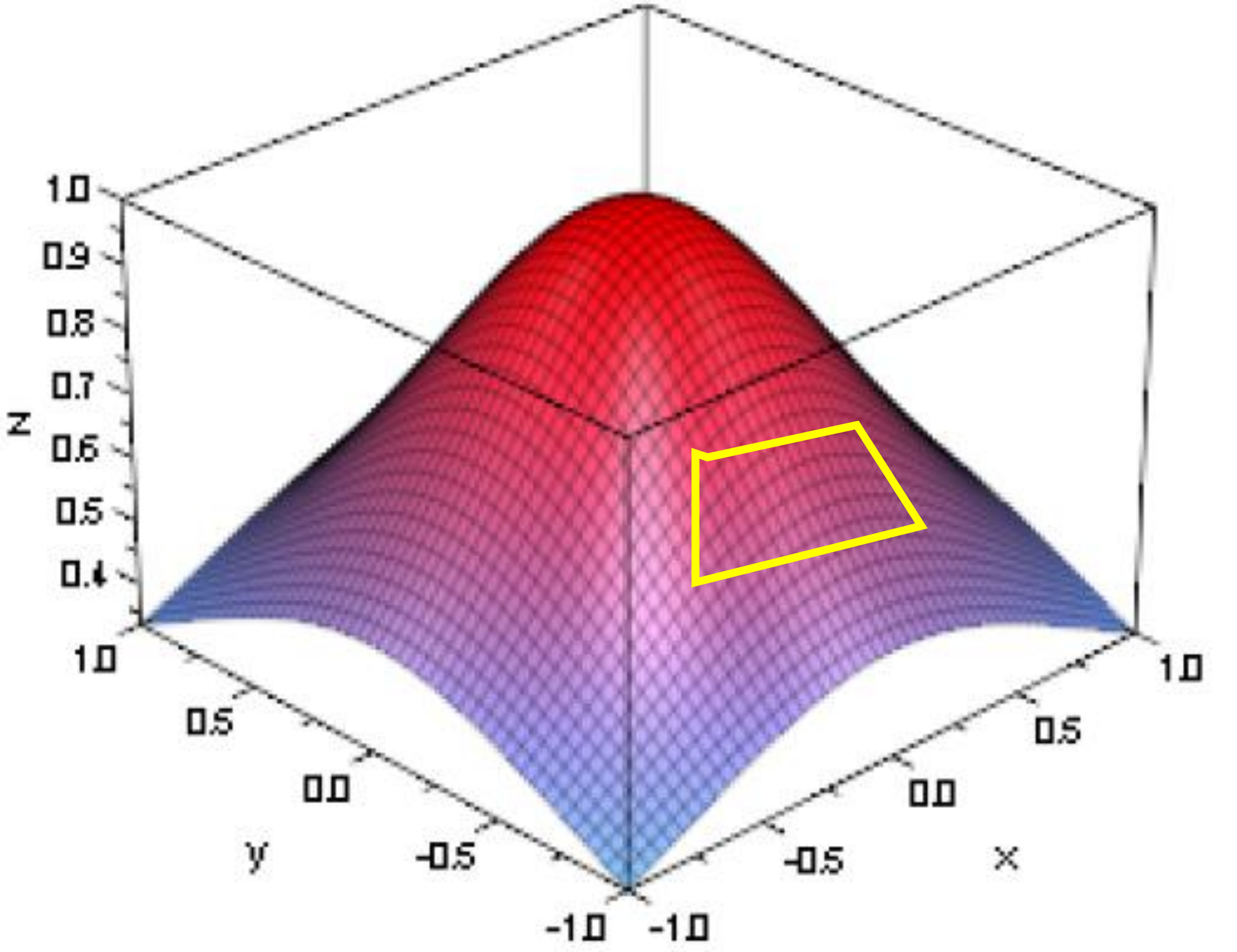
$$\boldsymbol{rot}\mathbf{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} = \nabla f$$

$$\omega = v_x - u_y = 0$$ **渦無しの場** と呼ぶ

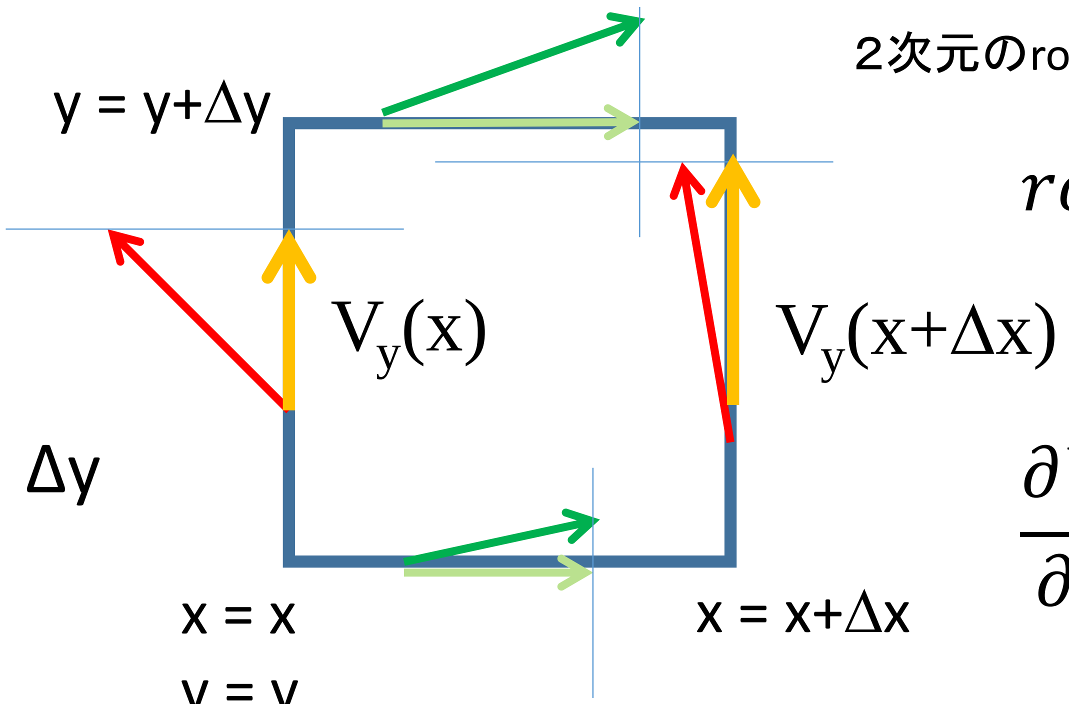
もし $\nabla \times \mathbf{F} = 0$、ならば $\mathbf{F} = \nabla f$

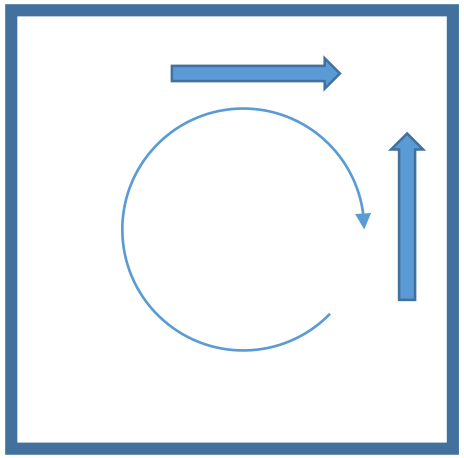
スカラーのポテンシャルが定義された時
傾きを一周すると0になる。

f



Rotation のおさらい





2次元のrot V

$$rot\mathbf{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{V_y(x + \Delta x) - V_y(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{V_x(y + \Delta y) - V_x(y)}{\Delta y}$$

証明

もし、$\nabla \times \mathbf{F} = 0$、ならば$\mathbf{F} = \nabla f$ ← スカラー関数

$$rot\mathbf{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{F_x(y + \Delta y) - F_x(y)}{\Delta y} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{F_y(x + \Delta x) - F_y(x)}{\Delta x}$$

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad F_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y}$$

$$rot\,F = -\frac{\frac{\boxed{f(x+\Delta x, y+\Delta y)} - \boxed{f(x, y+\Delta y)}}{\Delta x} - \frac{\boxed{f(x+\Delta x, y)} - \boxed{f(x, y)}}{\Delta x}}{\Delta y}$$

$$+\frac{\frac{\boxed{f(x+\Delta x, y+\Delta y)} - \boxed{f(x+\Delta x, y)}}{\Delta y} - \frac{\boxed{f(x, y+\Delta y)} - \boxed{f(x, y)}}{\Delta y}}{\Delta x}$$

$= 0$

$$v = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y) = (\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y})$$

速度ポテンシャル

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \phi_{xx} + \phi_{yy} = u_x + v_y = \mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

もし、流体が非圧縮(水みたいなもの)
であれば

$$div\,\mathbf{v} = 0$$

ここで、流れ関数を考える。

$\psi_x = -v, \qquad \psi_y = u$ という関数ψがあると

$$u_x + v_y = \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0$$

$$\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = -v_x + u_y = \omega$$

渦無しの場であれば、$\Delta\psi = 0$

ψ, ϕも調和関数

$$v = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y) = \binom{u}{v}$$

$$\psi_x = -v, \qquad \psi_y = u$$

$$\phi_x = u = \psi_y, \qquad \phi_y = v = -\psi_x$$

これは、$f = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$についてのコーシー・リーマンの方程式

ここで、複素数が出てきている.....

コーシー・リーマンの条件 $\quad f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

であるならば、微分可能　正則

このfのことを複素速度ポテンシャルと呼ぶことがある。

複素速度ポテンシャル

$$f = \phi + i\psi$$

$$z = x + iy$$

$$\phi_x = u = \psi_y, \qquad \phi_y = v = -\psi_x$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f' = \frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \phi_x + i\psi_x = u - iv$$

コーシーリーマンの関係式を使わないと変なことに

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + i\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \dots$$

$$Re(f') = u, \qquad -Im(f') = v$$

$f' = qe^{-i\theta}$ とすると、 $v = \begin{pmatrix} q\cos\theta \\ q\sin\theta \end{pmatrix}$ と書ける。 これは、qが速度、θが方向を意味している。

コーシー・リーマン

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\phi_x = u = \psi_y, \qquad \phi_y = v = -\psi_x$$

流体力学における連続の方程式$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$を満たすことが可能

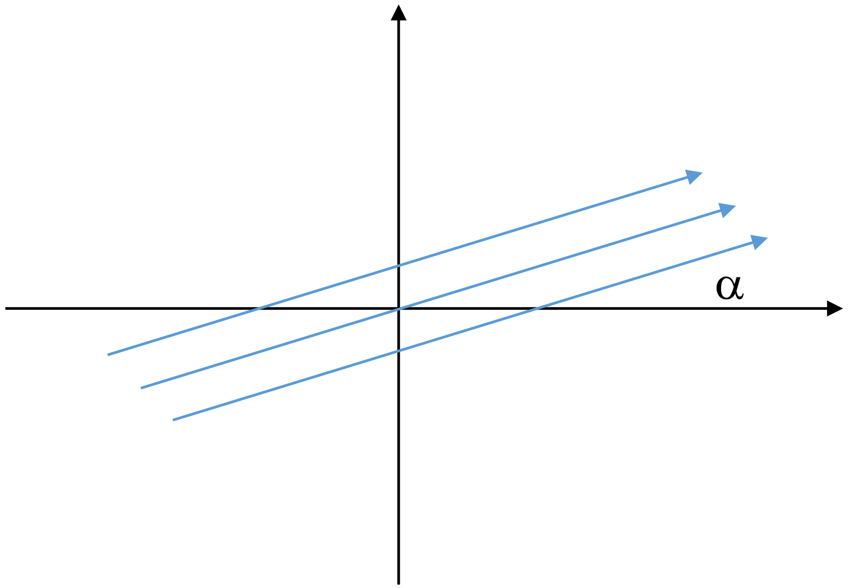
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

ϕ: 速度ポテンシャル
ψ: 流れ関数
$W = \phi + i\psi$: 複素速度ポテンシャル

複素速度ポテンシャル

$$f = \phi + i\psi$$

$$z = x + iy$$



$$f = Uze^{-ia}$$ 一定の流れ

$$f = U(x+iy)e^{-ia} = U(x+iy)(\cos a - i\sin a) = U(x\cos a + y\sin a) + iU(-x\sin a + y\cos a)$$

ϕ ψ

$$\frac{\partial f}{\partial z} = U(\cos a - i\sin a) = u - iv$$

$$u = U\cos a$$
$$v = U\sin a$$

$$v = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y) = \binom{u}{v}$$

等ポテンシャル線$\phi = const.$と流線$\psi = const$

$$\phi_x = u = \psi_y$$

$$\phi_y = v = -\psi_x$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \quad \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = d\phi$$

ここで、d**r**を$\phi = const$ に沿って動かせば、$\nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$=0 すなわち、$\nabla\phi$と$d\mathbf{r}$は直交

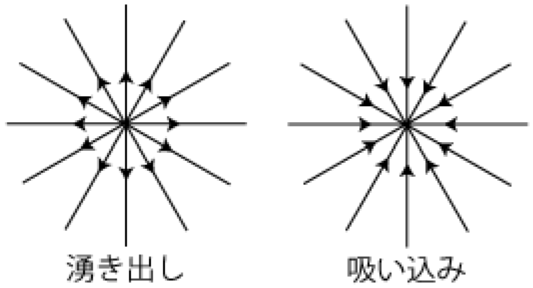
$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \quad \nabla\psi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi$$

ここで、d**r**を$\psi = const$ に沿って動かせば、$\nabla\psi \cdot d\mathbf{r}$=0 すなわち、$\nabla\psi$と$d\mathbf{r}$は直交

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z} = u(-v) + vu = 0$$

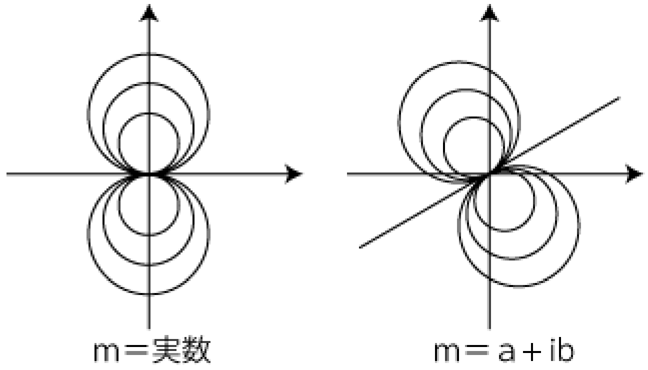
なので、等ポテンシャル線と流線は直交する。

複素速度ポテンシャルの例



$f = Uz$　　一定の流れ

$f = m \log z$　　z＝0から湧き出し(m>0)もしくは吸い込み(m<0)がある流れ

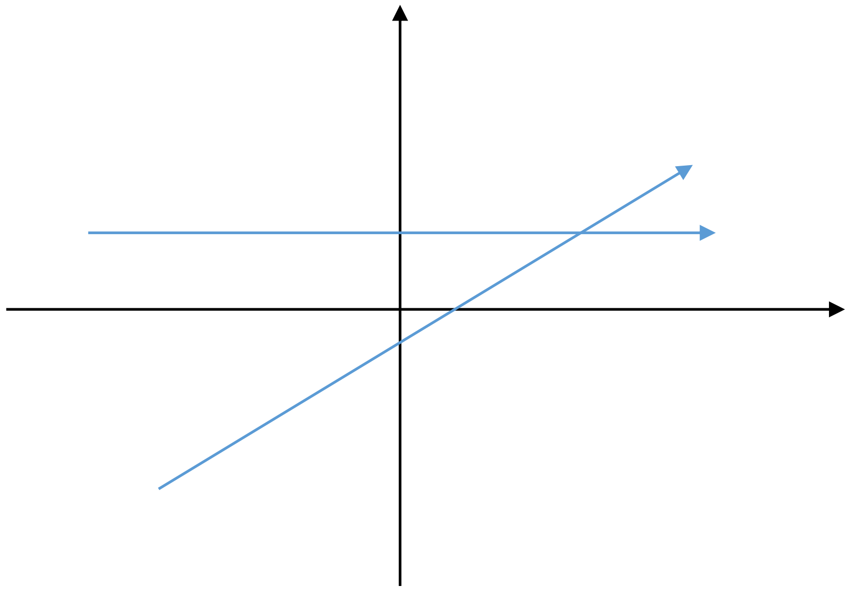


$f = \frac{re^{i\theta}}{z}$　　z＝0から2重湧き出し。rは湧き出し強さでθが方向

$f = i\Gamma \log z$　　z＝0にある強さΓの渦。原点を除けば渦度は0なので、渦無しの仮定は満たす。

$f = Uz$ 一定の流れ(x軸に平行)

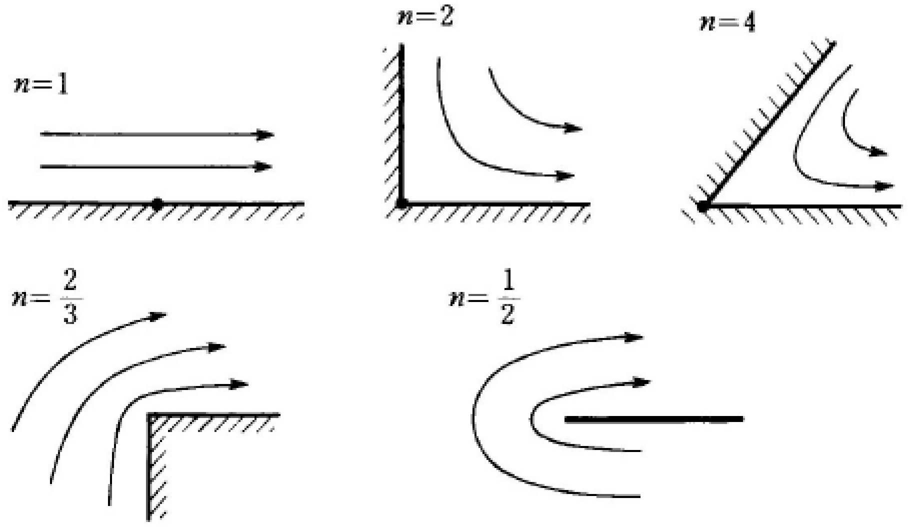
$f = Ue^{-i\theta}z$ 一定の流れ（θの方向）



$$u = U\cos\theta\,, \qquad v = U\sin\theta \quad \rightarrow \quad u - iv = U(\cos\theta - i\sin\theta) = Ue^{-i\theta}$$

$$\frac{df}{dz} = u - iv = Ue^{-i\theta} \quad \rightarrow \quad f = Ue^{-i\theta}z$$

$$f = \frac{Uz^n}{n} \quad \left(U > 0, n \geq \frac{1}{2}\right)$$ 角を回る流れ



$$f(z) = Az^n \qquad \frac{d}{dz}f(z) = nAz^{n-1}$$

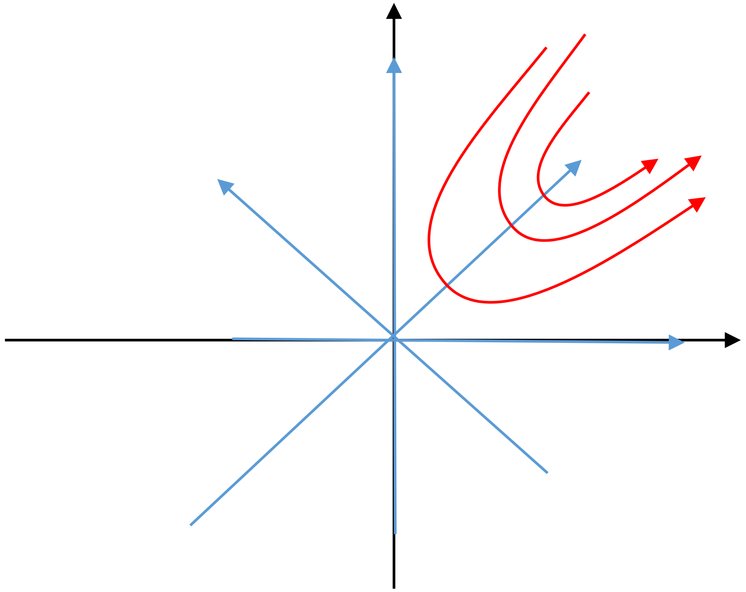
$z = re^{i\theta}$ として

$$f = Ar^n e^{in\theta} = Ar^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \phi + i\psi$$

$$\phi = Ar^n \cos n\theta\,, \qquad \psi = Ar^n \sin n\theta$$

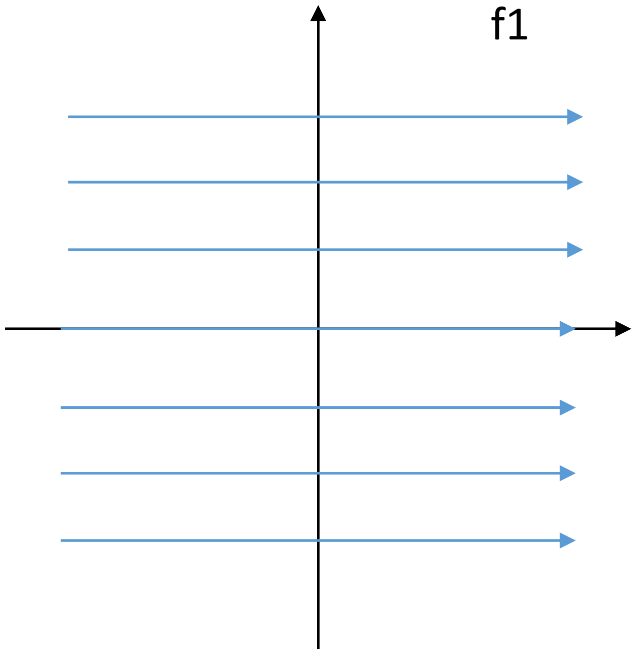
例えば、$\psi = 0,\quad \theta = k\dfrac{\pi}{n}$

流線はこれに垂直

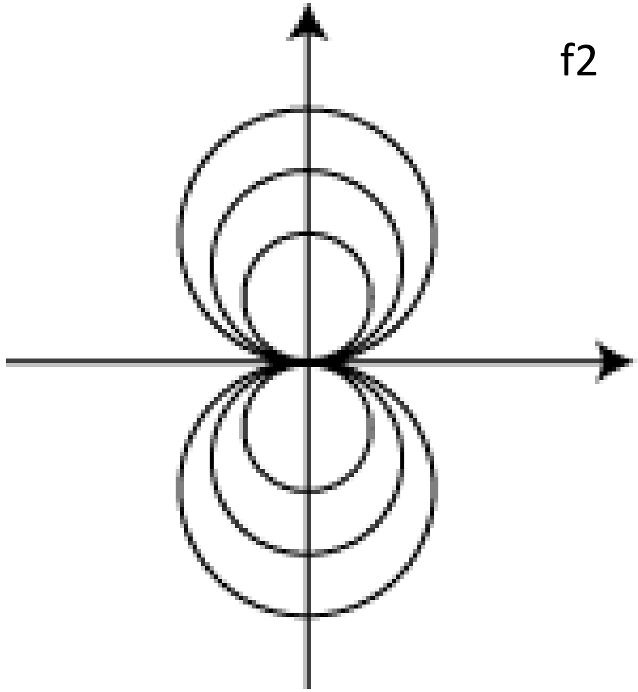


流れ関数の合成　（調和関数だからできる）

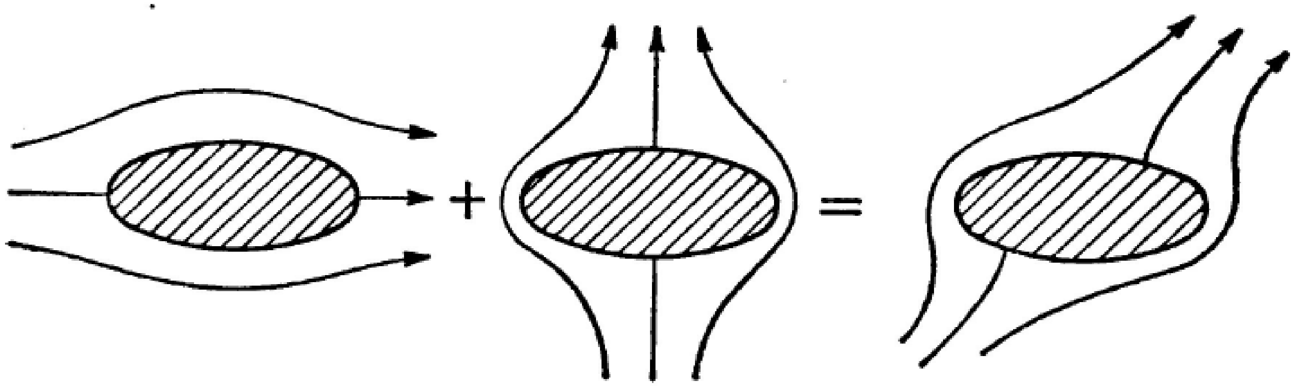
$$f_1 = Uz \qquad f_2 = \frac{1}{z}$$



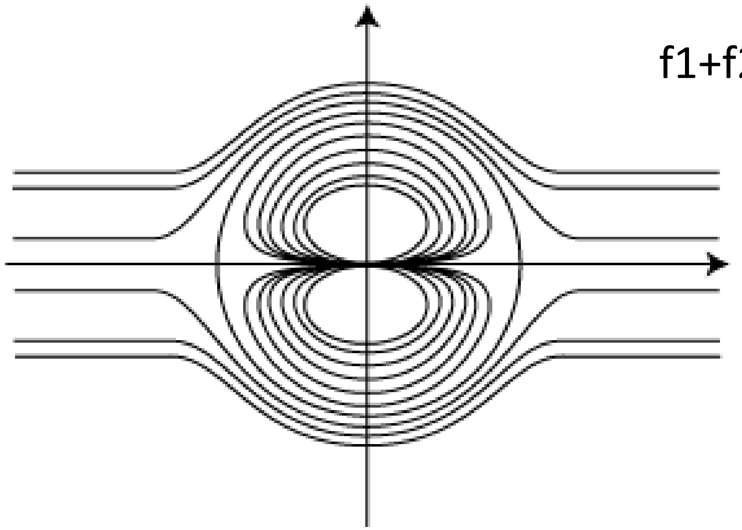
f1



f2



$C_1\phi_1 + C_2\phi_2 = \phi_3$



f1+f2