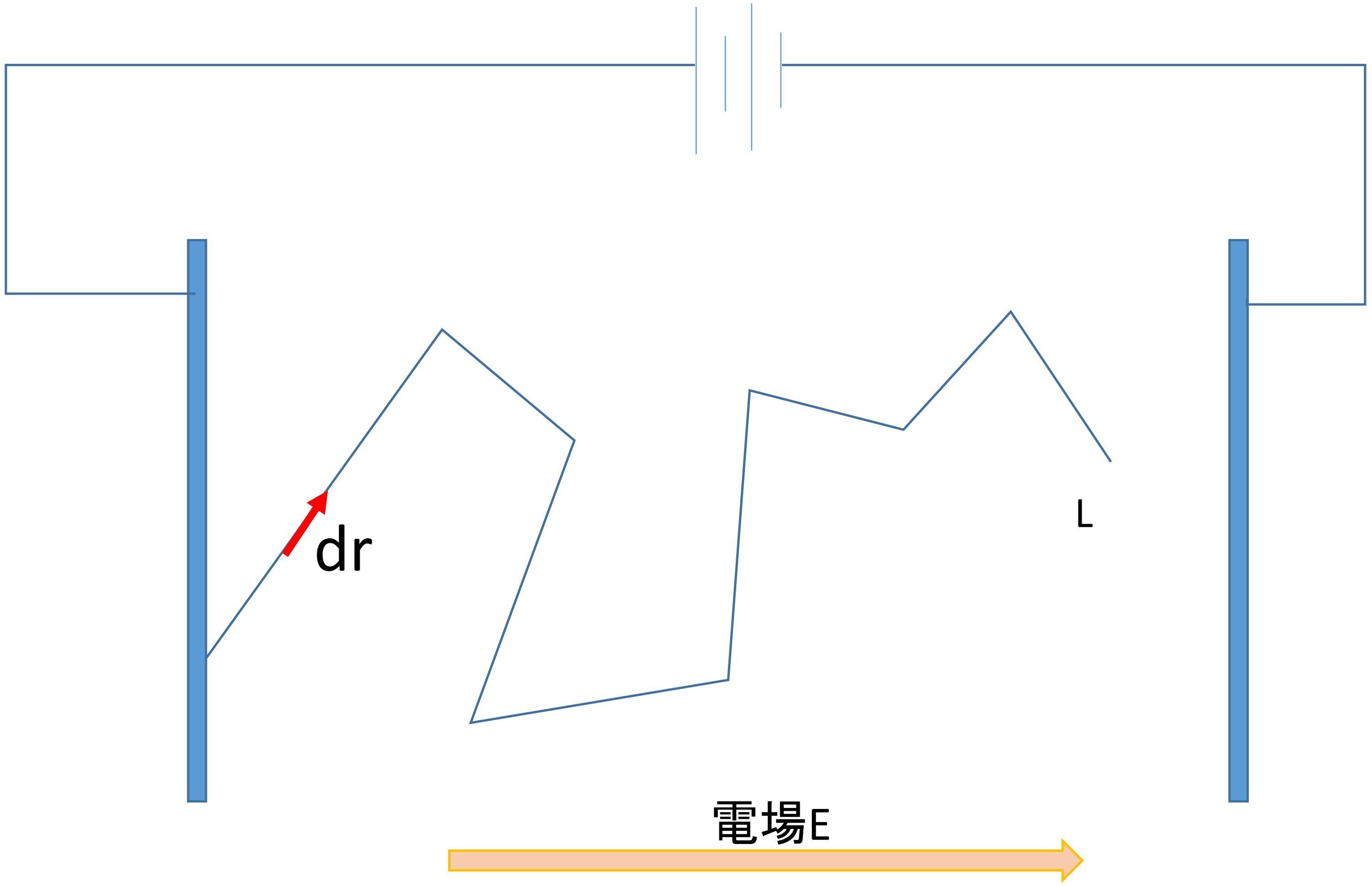
応用数学　2

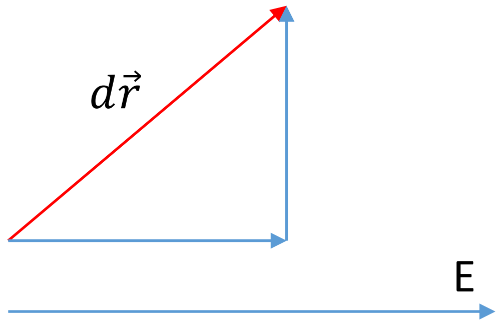
ベクトルの微分、積分　(線積分)

http://gt_ils.ils.uec.ac.jp/AppMath/

ベクトルの微分、積分

なぜベクトルの微分や積分が必要か？





$$F = e\vec{E}$$

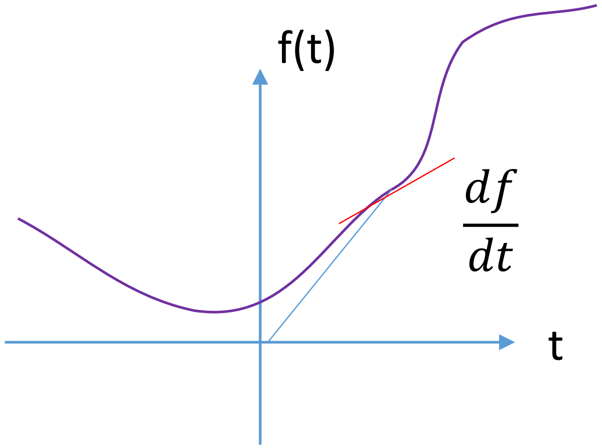
$$\Delta\phi = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\phi = \int_L F \cdot d\vec{r}$$

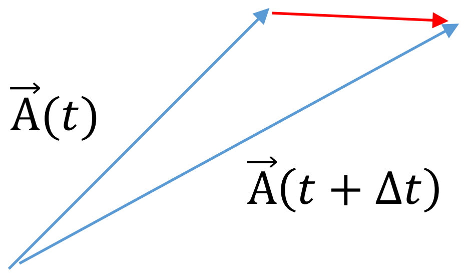
ベクトルの微分

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

普通の微分



$$\mathbf{A}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\mathrm{A}}(t+\Delta t)-\vec{\mathrm{A}}(t)}{\Delta t}$$



同じベクトルの外積

分配法則にも注意

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r})=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

ベクトルの積分

$$\phi = \int_L F \cdot d\vec{r}$$

例えば、電荷が電場中においてある

$F = e\vec{E}$として、$\vec{E}$ の方向を z とすれば、

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = E_z dz$$

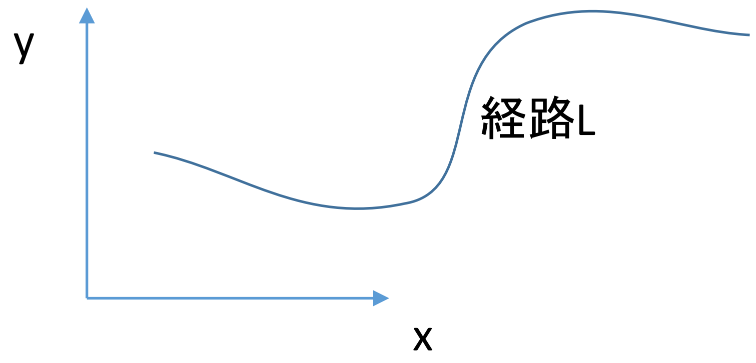
$$\phi = \int_L E_z dz = E_z L_z$$

しかし $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ だとすれば、

$$\phi = \int_L (E_x \underline{dx} + E_y \underline{dy} + E_z \underline{dz})$$

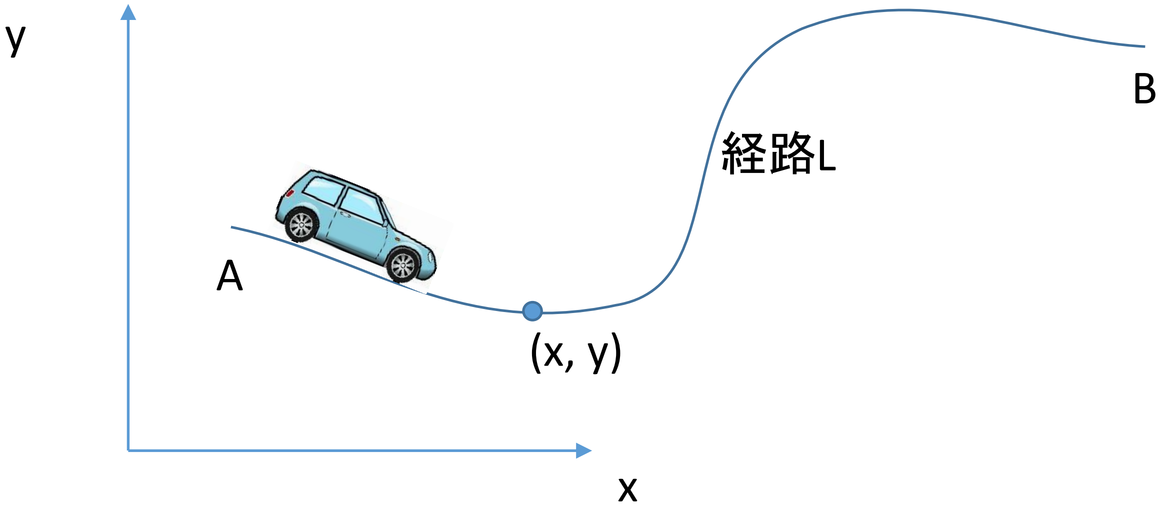
~~これも同じようにすぐ解ける？？~~

Why?



L の経路では、dx と dy が同時に変わってしまう。
（関係しながら変わってしまうために、独立に積分できない。）

どうする？　　　　＝＞状況を考えれば、答えが見つかるかも？



例えば、
車でA -> B に向かうとすれば、時刻tが
決まれば位置が決まるはず

$x=x(t), y=y(t), z=z(t)$と1つのt（**媒介変数**）の関数とみなせる。

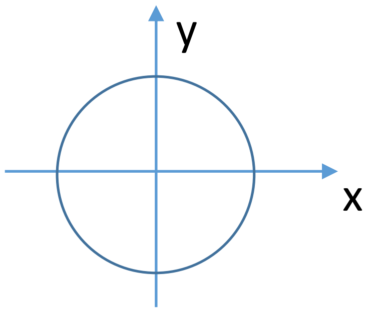
$$dx=\frac{dx}{dt}dt=x'(t)dt$$

$$dx=x'(t)dt, dy=y'(t)dt, dz=z'(t)dt$$

$$\phi=\int_L (E_x dx+E_y dy+E_z dz)=\int_L (E_x x'(t)+E_y y'(t)+E_z z'(t))dt$$

こんな経路

媒介変数表記　円の方程式

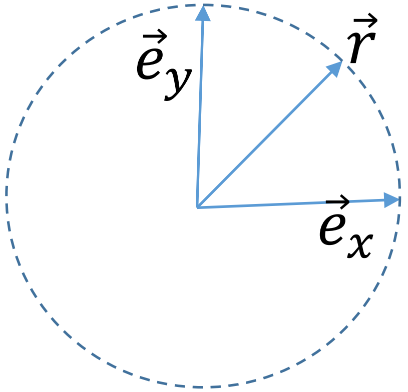


$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

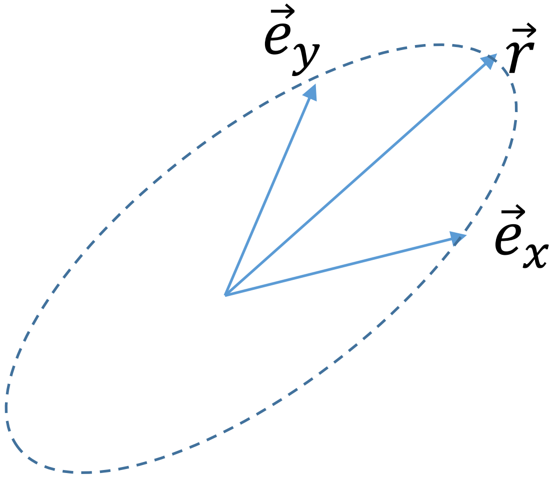
$$x = \sin\ t, \qquad y = \cos t$$

媒介変数で表示



$$x = \sin\ t, \quad y = \sin(\,t + \varphi)$$

$$\vec{e}_x \not\perp \vec{e}_y$$



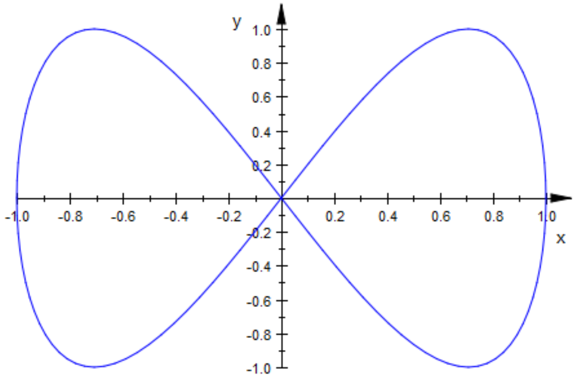
媒介変数tを用いて表される次のx, yはどのような関数（y(x)）になるか答えなさい。

$$\mathrm{x} = t^2 - 3t + 1, \qquad y = t^4 - 6t^3 + 10t^2 - 3t$$

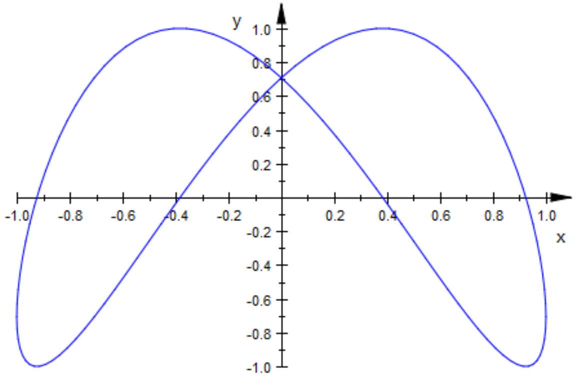
$$\boxed{\begin{matrix} t^4 \quad + 9t^2 \quad + 1 \\ -6t^3 + 2t^2 - 6t \end{matrix}}$$

$$- \boxed{t^2 - 3t + 1}$$

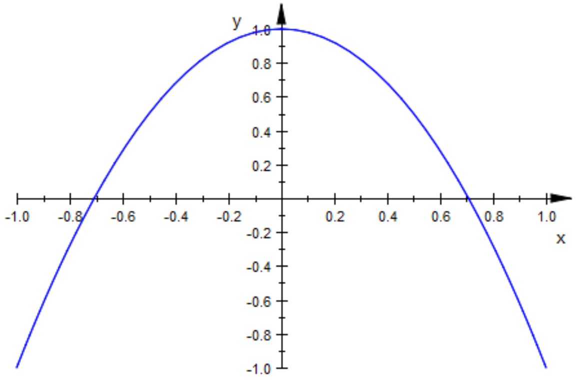
```
curve:=plot::Curve2d([sin(1*t), sin(2*t+PI*0)], t=0 .. 2*PI):
plot(curve)
```

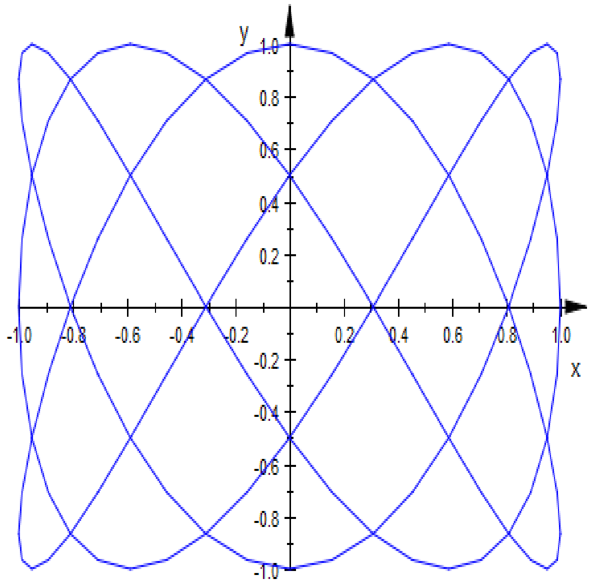



```
curve:=plot::Curve2d([sin(1*t), sin(2*t+PI/4)], t=0 .. 2*PI):
plot(curve)
```




```
curve:=plot::Curve2d([sin(1*t), sin(2*t+PI/2)], t=0 .. 2*PI):
plot(curve)
```



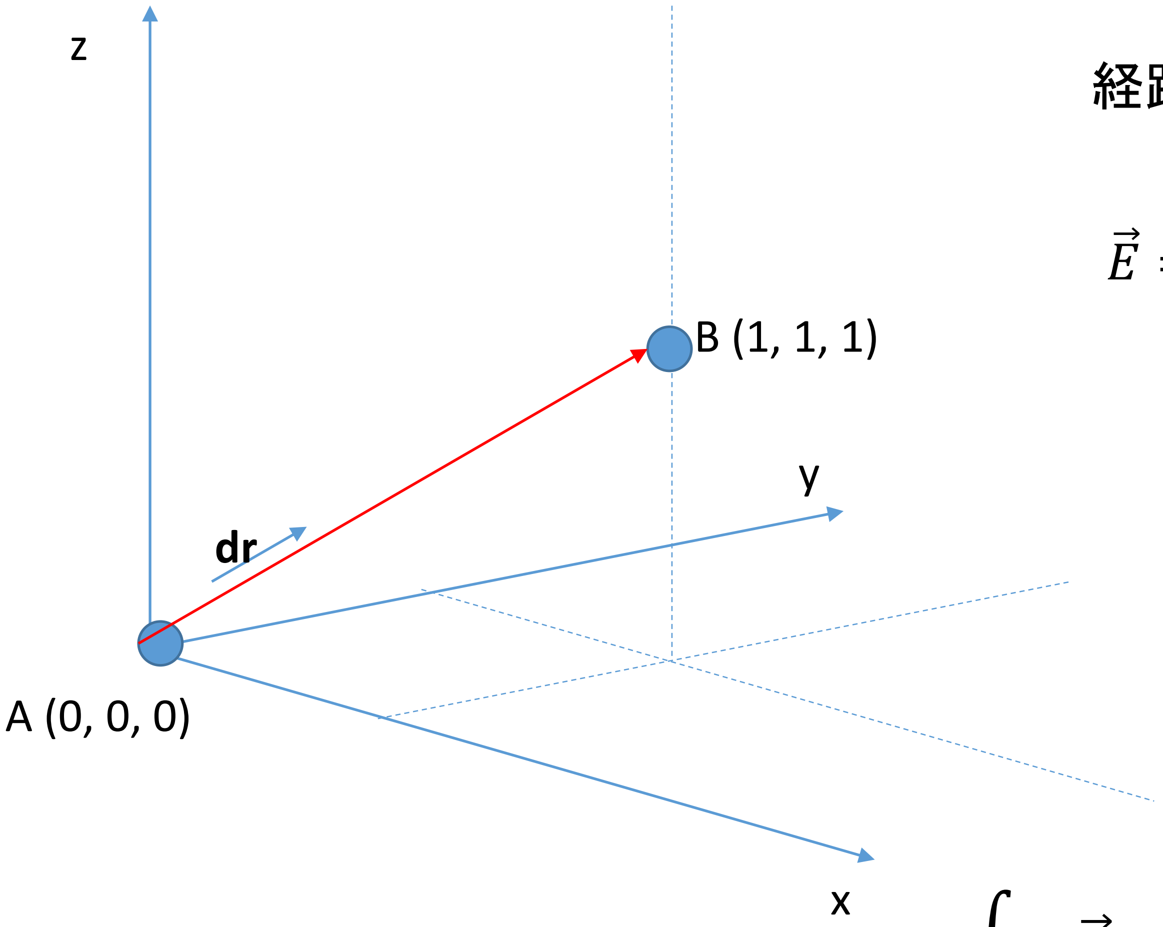


される次のx, yはどのような関数（y(x)）になるか答えなさい。

$$\mathrm{x} = \sin t\,, \qquad y = \sin 2t$$

$$y = \sin 2t = 1 - 2\sin \mathrm{t} \cos \mathrm{t} = \mathrm{t}$$

ベクトルの積分 （媒介変数）



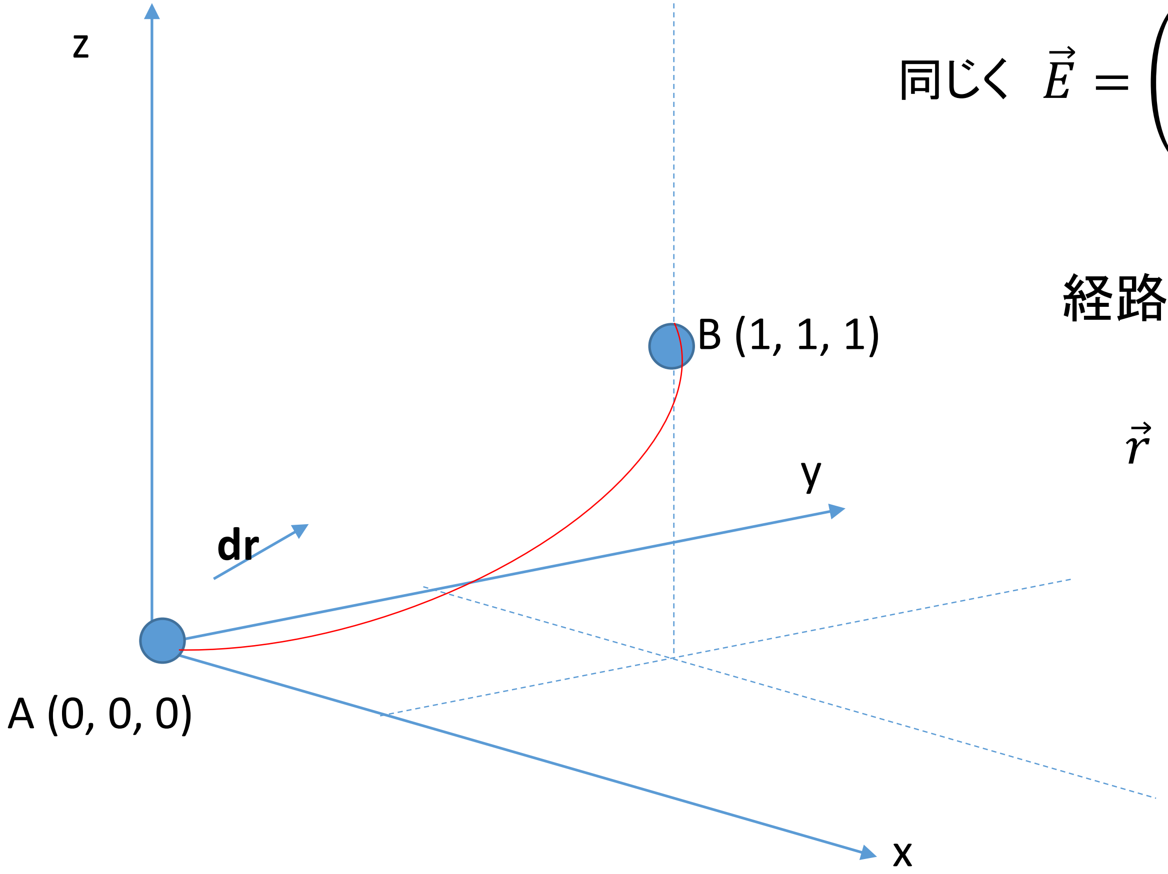
経路LをA(0, 0, 0)からB(1, 1, 1)までの直線とする。

$\vec{E} = \begin{pmatrix} x+y \\ yz \\ x+z^2 \end{pmatrix}$だと仮定する。

直線なので、媒介変数をtとすれば、 $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} x+y \\ yz \\ x+z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ t+t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dt \\ dt \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^1 (2t + t^2 + t + t^2) dt = \left[\frac{2}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^2\right]_0^1 = \frac{13}{6}$$



同じく $\vec{E}=\begin{pmatrix} x+y \\ yz \\ x+z^2 \end{pmatrix}$だと仮定する。

経路LをA(0, 0, 0)からB(1, 1, 1)まで以下の形の曲線だとする。

$$\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\begin{pmatrix} x+y \\ yz \\ x+z^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}=\int_0^1\begin{pmatrix} t+t^2 \\ t^5 \\ t+t^6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dt \\ 2tdt \\ 3t^2dt \end{pmatrix}$$

$$=\int_0^1(t+t^2+2t^6+3t^3+3t^8)dt=\left[\frac{3}{9}t^9+\frac{2}{7}t^7+\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{185}{84}$$

経路によって答えが違う。

では、$\vec{E}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$だとすると

直線経路では $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}=\int_0^1\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\dt\\dt\end{pmatrix}$$

$$=\int_0^1(3t)dt=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

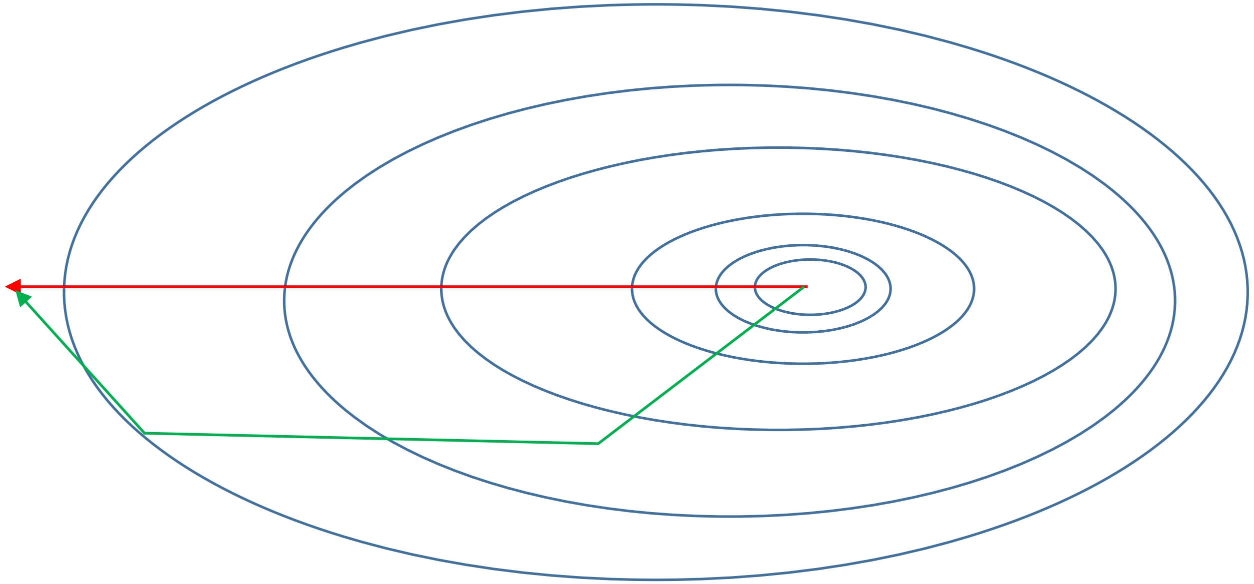
曲線経路では $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}$

経路によらない？

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}=\int_0^1\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\2tdt\\3t^2dt\end{pmatrix}$$

$$=\int_0^1(t+2t^3+3t^5)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{4}t^4+\frac{3}{6}t^6\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

この違いは何か？



等高線の世界では、経路にはよらない

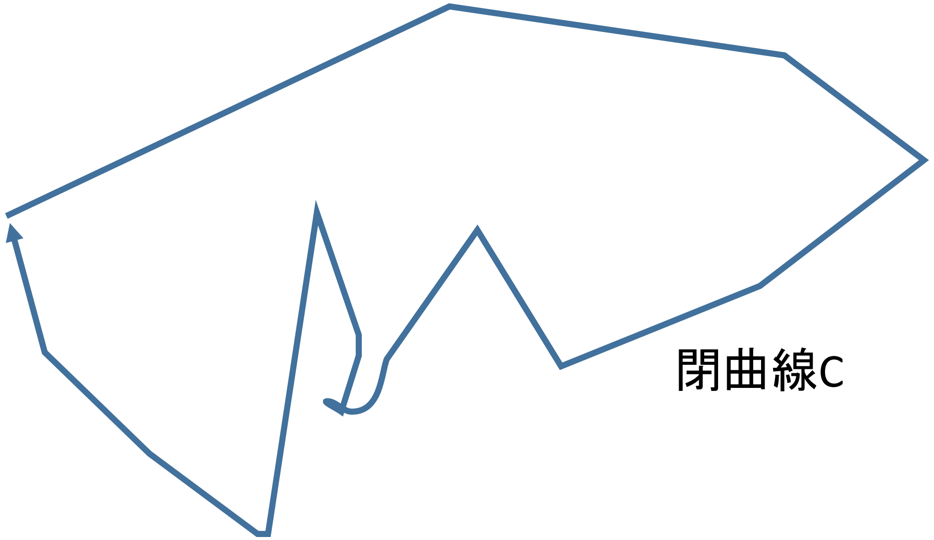
等高線の世界？　位置ポテンシャルのような世界？　電位のような世界？

電場ベクトルEは電位ϕの勾配　$\vec{E} = \nabla\phi$　ベクトル関数がスカラー関数の勾配で書ける

$$\vec{E} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_L \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_L \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \int_L d\phi = \phi(B) - \phi(A)$$

もし、$\vec{E} = \nabla\phi$ ならば、



$$\int_{閉曲線C} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

では、$\vec{E}=\begin{pmatrix}x^2\\y^2\\z^2\end{pmatrix}$だとすると

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$$

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\begin{pmatrix}x^2\\y^2\\z^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}=\int_0^1\begin{pmatrix}t^2\\t^2\\t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\dt\\dt\end{pmatrix}$$

$$=\int_0^1(3t^2)dt=\left[\frac{3}{3}t^3\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix}=1$$

曲線経路では $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}$

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\begin{pmatrix}x^2\\y^2\\z^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}=\int_0^1\begin{pmatrix}t^2\\t^4\\t^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\2tdt\\3t^2dt\end{pmatrix}$$

$$=\int_0^1(t^2+2t^5+3t^8)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{6}t^6+\frac{3}{9}t^9\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix}=1$$

では、$\vec{E} = \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{pmatrix}$だとすると

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{0.1}^{1} \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_{0.1}^{1} \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \\ 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dt \\ dt \end{pmatrix}$$

$$= \int_{0}^{1} \left(3\frac{1}{t} \right) dt = [3\ln(t)]_{0.1}^{1} = 3\ln(10)$$

曲線経路では $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{0.1}^{1} \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_{0.1}^{1} \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t^2 \\ 1/t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ 2tdt \\ 3t^2dt \end{pmatrix}$$

$$= \int_{0.1}^{1} \left(\frac{1}{t} + 2\frac{1}{t} + 3\frac{1}{t} \right) dt = [6\ln(t)]_{0.1}^{1} = 6\ln(10)$$

では、$\vec{E}=\begin{pmatrix}1/x^2\\1/y^2\\1/z^2\end{pmatrix}$だとすると

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$$

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{0.1}^{1}\begin{pmatrix}1/x^2\\1/y^2\\1/z^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}=\int_{0.1}^{1}\begin{pmatrix}1/t^2\\1/t^2\\1/t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\dt\\dt\end{pmatrix}$$

$$=\int_{0.1}^{1}(3/t^2)dt=\left[3\frac{-1}{t}\right]\begin{matrix}1\\0.1\end{matrix}=-3+30=27$$

曲線経路では $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}$

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{0.1}^{1}\begin{pmatrix}1/x^2\\1/y^2\\1/z^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}=\int_{0.1}^{1}\begin{pmatrix}1/t^2\\1/t^4\\1/t^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\2tdt\\3t^2dt\end{pmatrix}$$

$$=\int_{0.1}^{1}\left(\frac{1}{t^2}+2\frac{1}{t^3}+3\frac{1}{t^4}\right)dt=\left[-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right]\begin{matrix}1\\0.1\end{matrix}=-3+10+100+1000=1107$$