米田、戸倉川、月7限1930~2100、西5-109

応用数学A　第4回

(復習回)

ベクトルとは？

- スカラー量:A

大きさのみで確定される
長さ、熱、面積・・・

- ベクトル 量:$\vec{\boldsymbol{A}}$ $\mathbb{A}$

大きさと方向で確定される
速度、加速度、電気力、重力

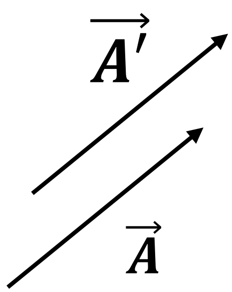
成分表示 $\vec{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}_x, \boldsymbol{A}_y, \boldsymbol{A}_z)$

$$\vec{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3)$$

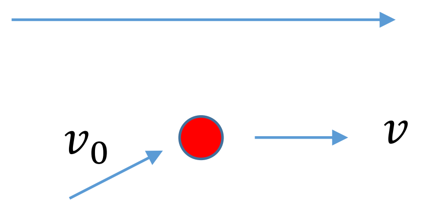
$$|\vec{\boldsymbol{A}}| = |\vec{\boldsymbol{A}'}|$$

$\vec{\boldsymbol{A}} /\!/ \vec{\boldsymbol{A}'}$ ***（かつ同じ向き）***

$$\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{A}'}$$



電場 $\vec{E}$

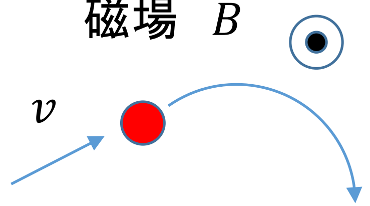


$$\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{q}\vec{\boldsymbol{E}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + q\vec{E}t$$

磁場 $\vec{B}$



$$\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{q}\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + q\int \vec{v} \times \vec{B}dt$$

ベクトルとは何？

行列？

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

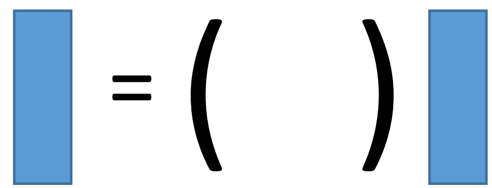
テンソル

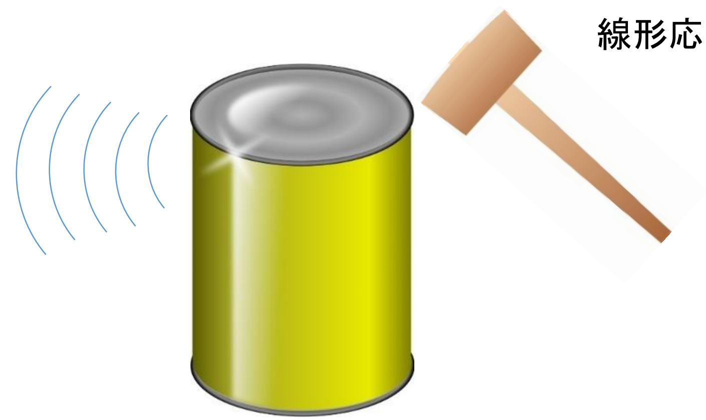
$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3$$

$$y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3$$

$$y_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

連立方程式？





線形応答？

バネ?, F=kx,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\mathrm{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Fx} \\ \mathrm{Fy} \\ \mathrm{Fz} \end{pmatrix}$$

ゴム?,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\mathrm{k} & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Fx} \\ \mathrm{Fy} \\ \mathrm{Fz} \end{pmatrix}$$

内積

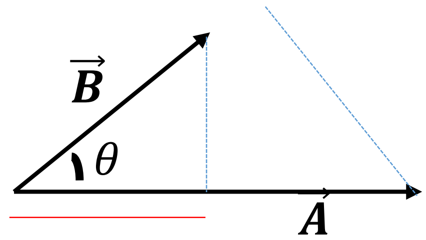
- 内積　$\vec{A}\cdot\vec{B}$　　$\vec{A}=(A_x, A_y, A_z), \vec{B}=(B_x, B_y, B_z)$

(1) $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

(2) $\vec{A}\cdot\vec{B}= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

スカラー量

(1)→(2) 余弦定理 $|\vec{A}-\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$
により証明可能



$|\vec{B}|\cos\theta=\vec{B}$の$\vec{A}$への射影成分

(3)演算法則

i. $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$（**交換法則**）

ii. $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$ (分配法則)

iii. $(k\vec{A})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot(k\vec{B})=k(\vec{A}\cdot\vec{B})$　(kはスカラー量)

(4) 内積が0⇒$\vec{A}$、$\vec{B}$ベクトルが直行(但し0ベクトルを含まないとき)

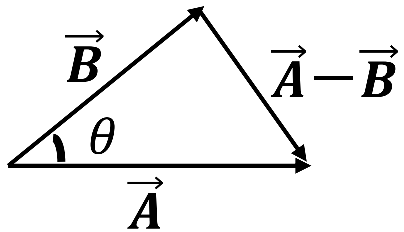
内積は何を表す、何に使える？

⇒　例えば仕事量：ベクトル間の平行成分の積

ベクトル間の角度を知るためにも使える。

余弦定理での証明

- $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)\ \ \vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$
  $\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x, Ay - B_y, Az - B_z)$



- 余弦定理
  - $|\vec{A} - \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$

左辺$= (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (Az - B_z)^2$

$= A_x{}^2 + Bx^2 - 2A_xB_x + Ay^2 + By^2 - 2A_yB_y + Az^2 + Bz^2 - 2A_zB_z$

右辺$= A_x{}^2 + Ay^2 + Az^2 + B_x{}^2 + By^2 + Bz^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B}$

より $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

A-Bという長さはベクトルを使わないと余弦定理が必要であったが、ベクトルを用いればA-Bベクトルのノルムを出すだけで良い！

例題1

$\vec{A} = (1, 2, 3)$ $\vec{B} = (-2, 1, 1)$ とした時

i. 内積$\vec{A}\cdot\vec{B}$を求めよ

$\vec{A}\cdot\vec{B}$=1*(-2)+2*1+3*1

=-2+2+3

=3

$(2)\ \vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

ii. $\vec{A}, \vec{B}$の成す角θを求めよ

$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$, $|\vec{A}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, $|\vec{B}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$= 3/2\sqrt{21}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(3/2\sqrt{21})$

$(1)\ \vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

iii. 点$\vec{A}$と点$\vec{B}$の距離を求めよ

$\vec{A} - \vec{B} = (3, 1, 2)$よって距離は$\sqrt{14}$

外積

- 外積 $\vec{A} \times \vec{B}$

(4) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$

$\vec{i} = (1,0,0), \vec{j}, = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1), x, y, z$方向の単位ベクトル$\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$
外積はベクトル量であり方向は$\vec{A}, \vec{B}$に垂直
($\vec{A} \rightarrow \vec{B}$で右ネジの進む向き)

(5) $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| sin\theta$

= $\vec{A}$、$\vec{B}$ベクトルで作られる平行四辺形の面積：即ち垂直成分との積

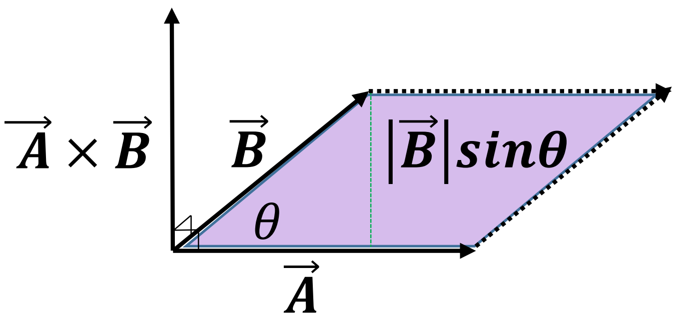
外積が0⇒$\vec{A}$、$\vec{B}$ベクトルが平行（但し0ベクトルを含まないとき）

(6)演算法則

i. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

ii. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

iii. $|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$



(5) $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|sin\theta$を証明せよ

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$\boxed{= (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)}$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = (A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2$$

$$= (A_y{}^2B_z{}^2 + A_z{}^2B_y{}^2 - 2A_yB_zA_zB_y) + (A_z{}^2B_x{}^2 + A_x{}^2B_z{}^2 - 2A_zB_xA_xB_z) + (A_x{}^2B_y{}^2 + A_y{}^2B_x{}^2 - 2A_xB_yA_yB_x)$$

ここで$sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$を考えると

$sin^2\theta = 1 - (\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|})^2$ よって

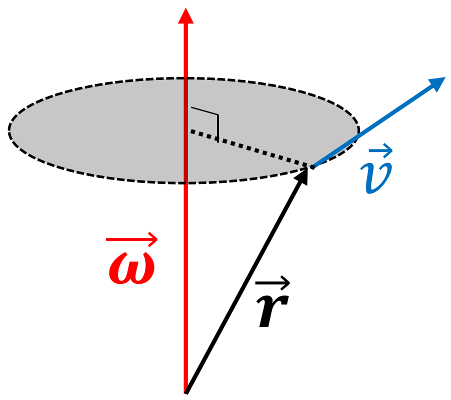
$$(|\vec{A}||\vec{B}|)^2 sin^2\theta = A_x{}^2B_x{}^2 + Ay^2B_y{}^2 + Az^2B_z{}^2 + A_x{}^2B_y{}^2 + Ay^2B_z{}^2 + Az^2B_x{}^2 + Ax^2B_z{}^2 + Ay^2B_x{}^2 + Az^2B_y{}^2 - (A_x{}^2B_x{}^2 + Ay^2B_y{}^2 + Az^2B_z{}^2 + 2AxBxAyBy + 2AyByAzBz + 2AzBzAxBx)$$

$$= A_x{}^2B_y{}^2 + A_y{}^2B_z{}^2 + A_z{}^2B_x{}^2 + A_x{}^2B_z{}^2 + A_y{}^2B_x{}^2 + A_z{}^2B_y{}^2 - (2AxBxA_yB_y + 2AyB_yA_zB_z + 2AzBzA_xB_x)$$

外積は何を意味している？

例えば回転体の速度$\vec{v}$= $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$

$\vec{\boldsymbol{\omega}}$: 角速度ベクトル,$\vec{\boldsymbol{r}}$: 位置ベクトル



例えば力のモーメント$\vec{\mathrm{m}}$= $\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{f}}$

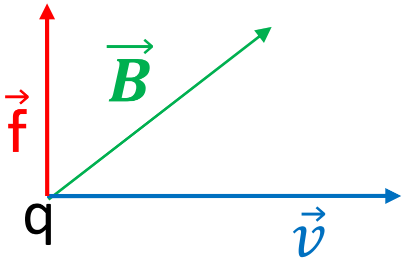
$\vec{\boldsymbol{f}}$: 力,$\vec{\boldsymbol{r}}$: 位置ベクトル

直感的にフレミング左手の法則も外積で表せそう？

$$\vec{\boldsymbol{f}} = q\left(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right)$$

$\vec{v}$: 速度ベクトル$\vec{B}$:磁場ベクトル

q: 電荷



垂直成分との積：決して面積だけを求める計算ではない

外積を使うことによって様々な物理量を定義・計算・利用できる。
ガウスの法則、アンペールの法則、ストークスの定理なども外積を使用

スカラー3重積、ベクトル3重積

- **スカラー3重積**

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=[\vec{A},\vec{B},\vec{C}],\ det\ ABC\ \ [\vec{A},\vec{B},\vec{C}]=\left|\begin{array}{ccc} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} A_x & A_y & \\ B_x & B_y & \\ C_x & C_y & \end{array}\right|$$

- **ベクトル3重積**

i. $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$

ii. $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

ii. の証明のためにx成分について考えると

$$\left(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right)_x= A_y(\vec{B}\times\vec{C})_z\text{-}A_z(\vec{B}\times\vec{C})_y$$

$$= A_y(B_xC_y-B_yC_x)\text{-}A_z(B_xC_z-BzCx)$$

$$=(A_yC_y-AzCz)B_x\text{-}(A_zB_z+A_yB_y)C_x$$

$$=(A_xC_x+A_yC_y-AzCz)B_x\text{-}(A_xB_x+A_zB_z+A_yB_y)C_x$$

$$=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}_x-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}_x$$

y, z 成分も同様に$\left(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right)_y=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}_y-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}_y,$

$\left(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right)_z=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}_z-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}_z$

よって$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

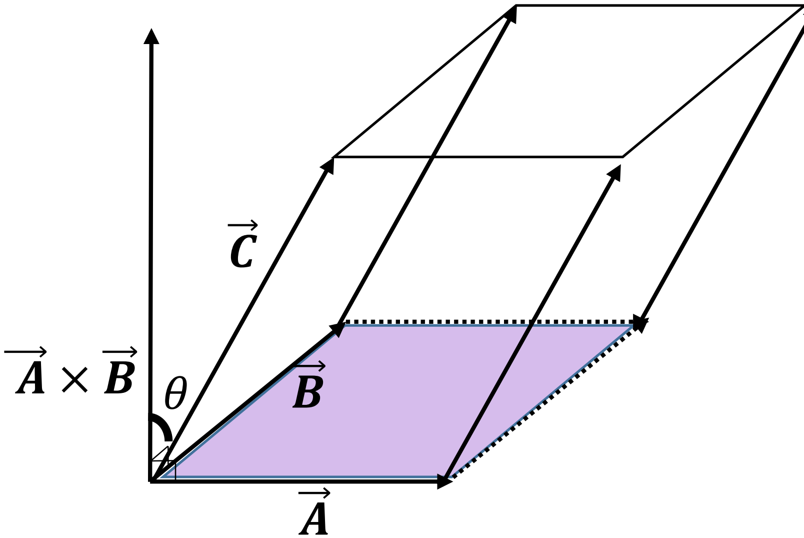
例題 **スカラー3重積**

ベクトル$\vec{A},\vec{B},\vec{C}$で作られる平行6面体の体積Vを求めよ

V=底面積×高さであり
$\vec{A}\times\vec{B}$を考えると、$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|sin\theta$は

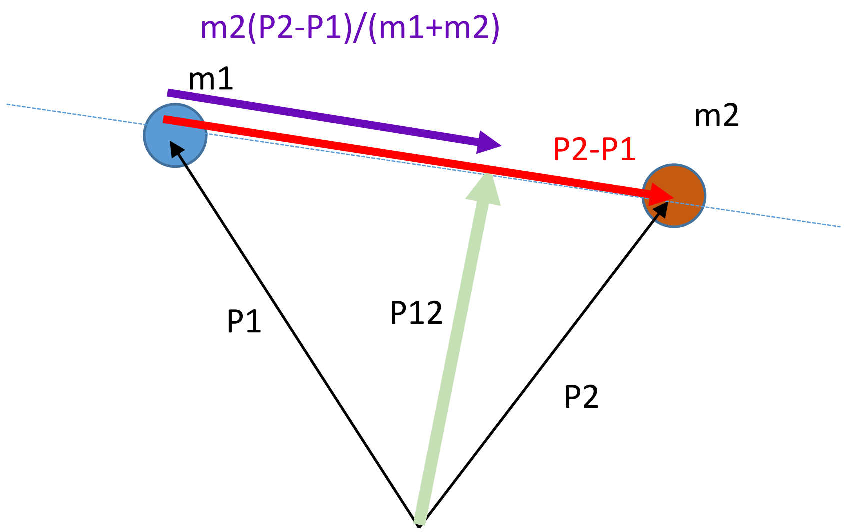
$\vec{A}$、$\vec{B}$ベクトルで作られる平行四辺形の面積
その向きは底面に垂直である。

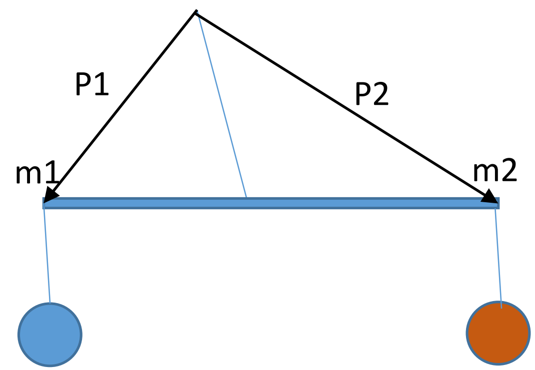
ここで$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$と$\vec{C}$の**内積**を考えると



$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|\left|\vec{C}\right|cos\theta$
θ は$\vec{A}\times\vec{B}$と$\vec{C}$が成す角
即ちスカラー3重積
$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right]$
は平行6面体の体積となる

[2] 位置ベクトル$P_1(x_1, x_2, x_3)$に質量m_1、$P_2(a_1, a_2, a_3)$に質量m_2が置いてある場合、その重心位置を求めなさい。２つの質点を図示して見ること。





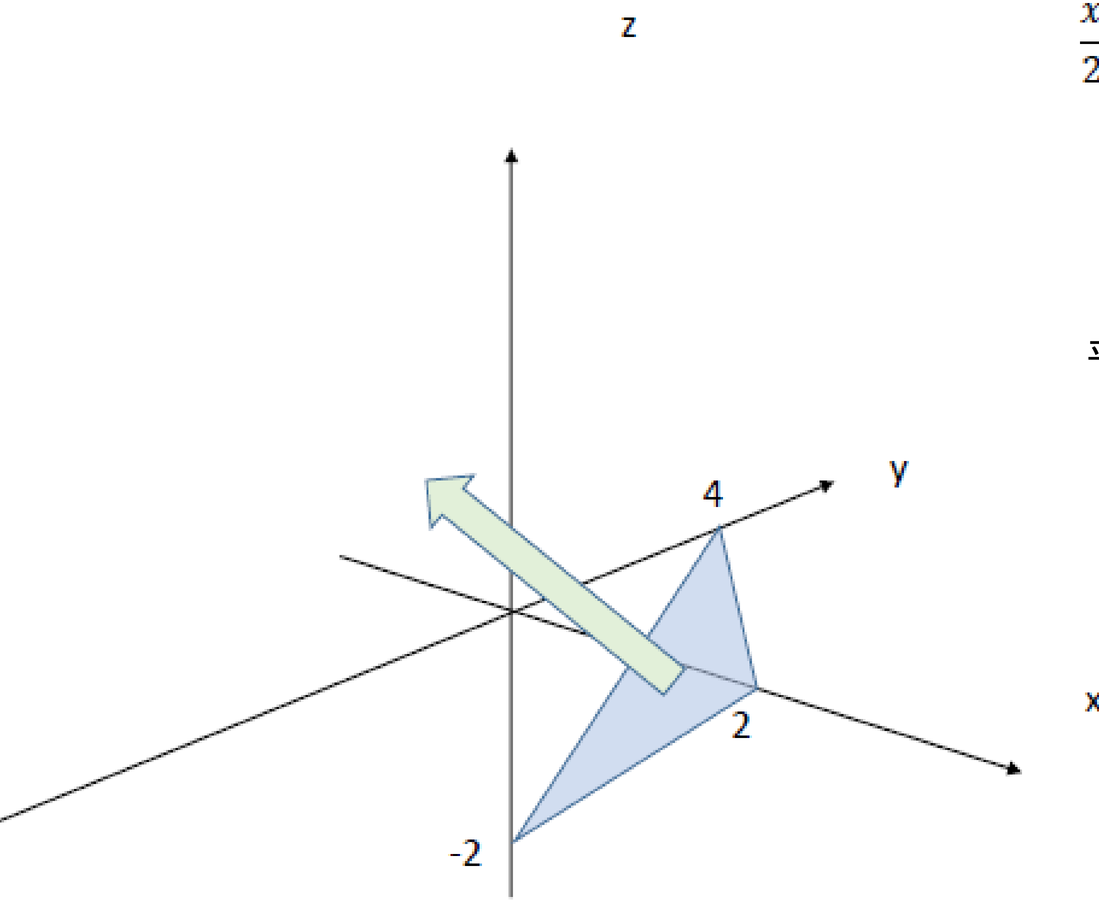
重み付

P12=m2(P2-P1)/(m1+m2) +P1

= [(m1P1)+(m2p2)]/(m1+m2)

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{P_i}}{\sum m_i}$$

[3]　x切片が２、y切片が4、z切片が-2の時の平面に垂直なベクトルを求めなさい。図示してみること。



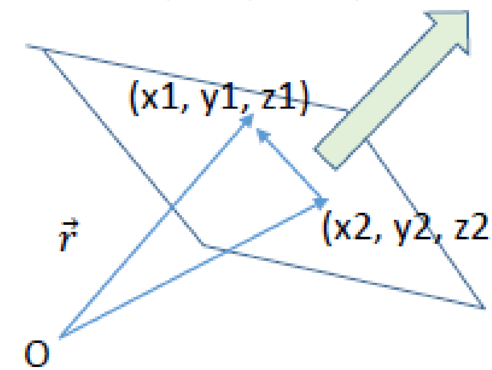
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-2}=1$$　平面の方程式

平面上の任意の点(x,y,z)において

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} = 1$$

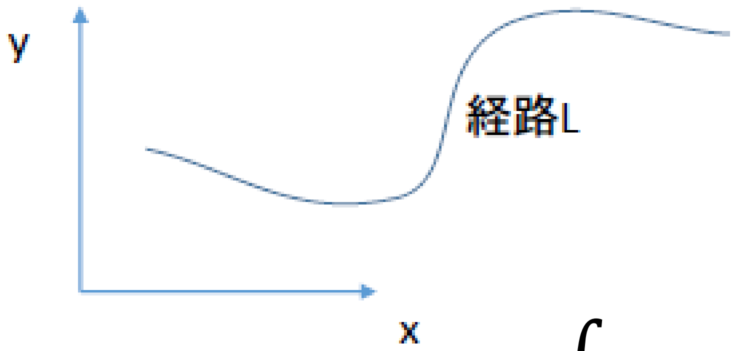
平面に含まれる直線(x1,y1,z1)- (x2,y2,z2)において

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} = 0$$



ベクトルa(1/2,1/4,-1/2)は平面に垂直である。

ベクトル関数の積分



$F = e\vec{E}$として、$\vec{E}$(z) の方向を z とすれば、

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = E_z dz$$

$$\phi = \int_L E \cdot d\vec{r} \qquad \phi = \int_L E_z dz = E_z L_z$$

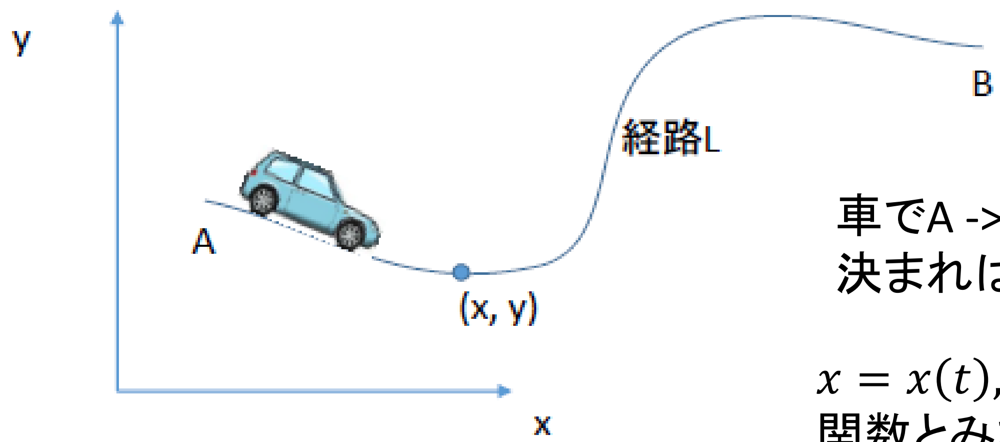
それでは一般に

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \phi = \int_L (E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

これで良い？？
⇒だめ！

L の経路では、dx と dy が同時に変わってしまう。
（関係しながら変わってしまうために、独立に積分できない。）

どうすれば良い？⇒媒介変数を利用する



車でA -> B に向かうとすれば、時間tが決まれば位置が決まるはず

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$と1つのt（媒介変数）の関数とみなせる。

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = x'(t)dt$$

$$dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt, dz = z'(t)dt$$

$$\phi = \int_L (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = \int_{L(t)} (E_x x'(t) + E_y y'(t) + E_z z'(t))dt$$

(E･dr/dt)dt

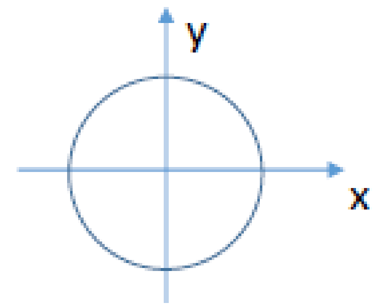
【定積分の置換積分の公式】（高校で習う）

$x=g(t)$, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$のとき

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

媒介変数表記　円の方程式

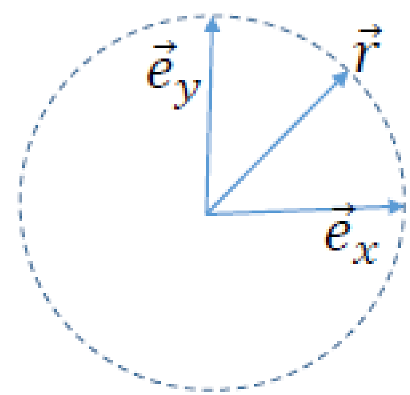
$$x^2 + y^2 = r^2$$



$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

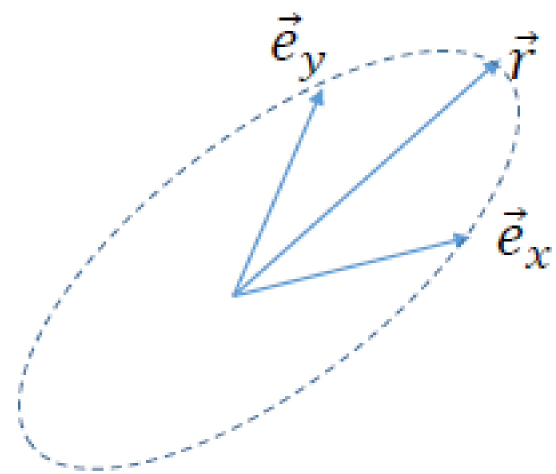
$$x = \sin\ t, \qquad y = \cos t$$

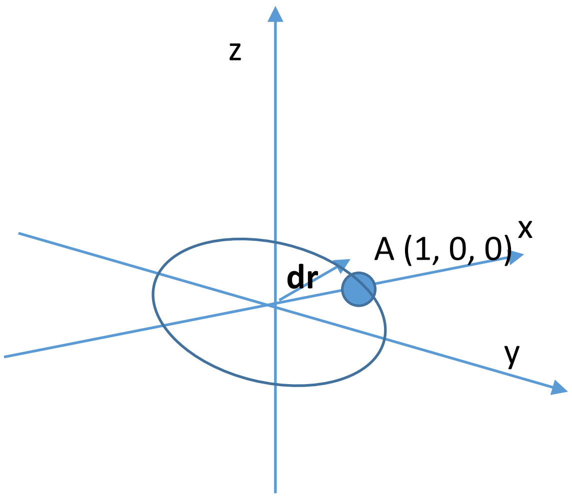
媒介変数で表示



$$x = \sin\ t, \quad y = \sin(\,t + \varphi\,)$$

$$\vec{e}_x \not\perp \vec{e}_y$$





経路LをA(1, 0, 0)からA(1, 0, 0)までの円とする。

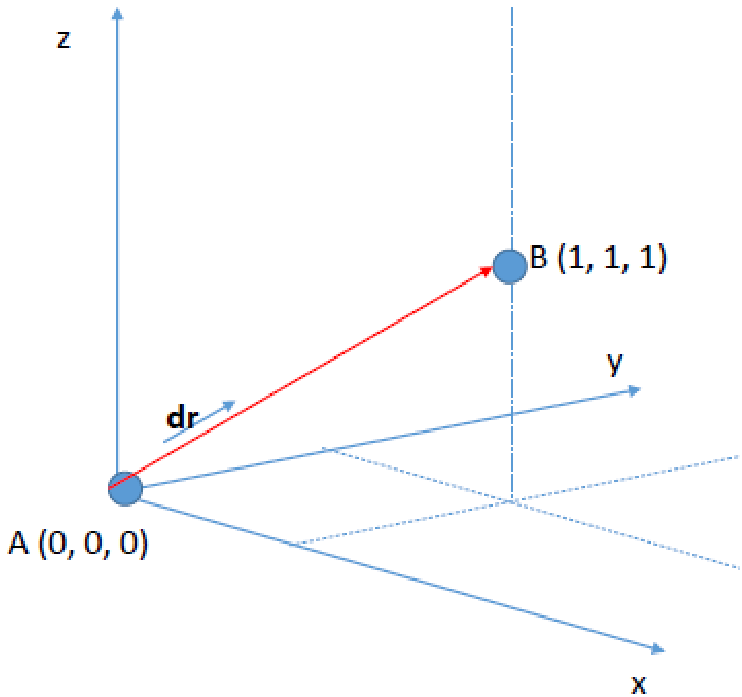
$\vec{E} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$とする。

円なので、媒介変数をtとすれば、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t\, dt \\ \cos t\, dt \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) dt = 0$$



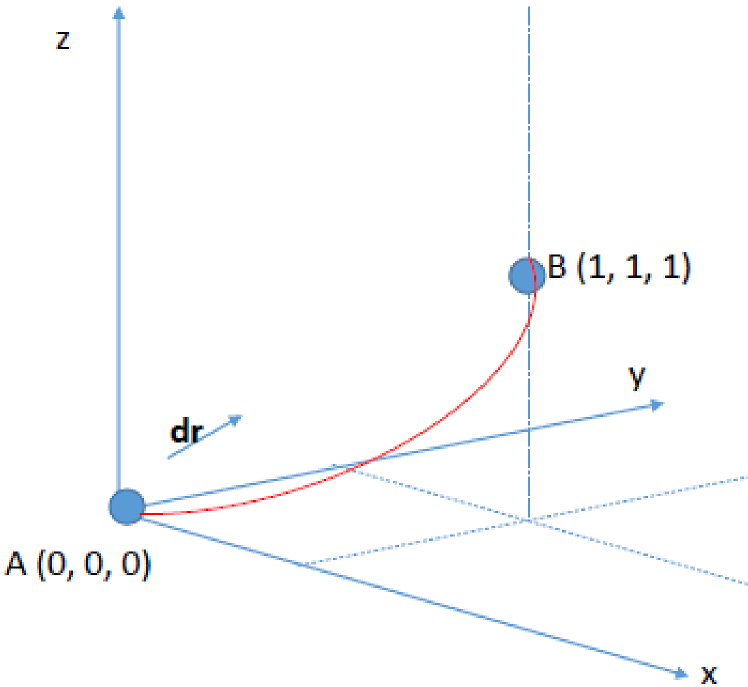
経路LをA(0, 0, 0)からB(1, 1, 1)までの直線とする。

$\vec{E} = \begin{pmatrix} x+y \\ yz \\ x+z^2 \end{pmatrix}$だと仮定する。

直線なので、媒介変数をtとすれば、 $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} x+y \\ yz \\ x+z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ t+t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dt \\ dt \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^1 (2t + t^2 + t + t^2)dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{13}{6}$$



$$\vec{E} = \begin{pmatrix} x+y \\ yz \\ x+z^2 \end{pmatrix}$$ だと仮定する。

経路LをA(0, 0, 0)からB(1, 1, 1)まで以下の形の曲線だとする。

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} x+y \\ yz \\ x+z^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t+t^2 \\ t^5 \\ t+t^6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dt \\ 2tdt \\ 3t^2dt \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^1 (t+t^2+2t^6+3t^3+3t^8)dt = \left[\frac{3}{9}t^9+\frac{2}{7}t^7+\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{185}{84}$$

経路によって答えが違う。

では、$\vec{E}=\begin{pmatrix}x^2\\y^2\\z^2\end{pmatrix}$だとすると

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}\qquad \int_L \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\begin{pmatrix}x^2\\y^2\\z^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}=\int_0^1\begin{pmatrix}t^2\\t^2\\t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\dt\\dt\end{pmatrix}$$

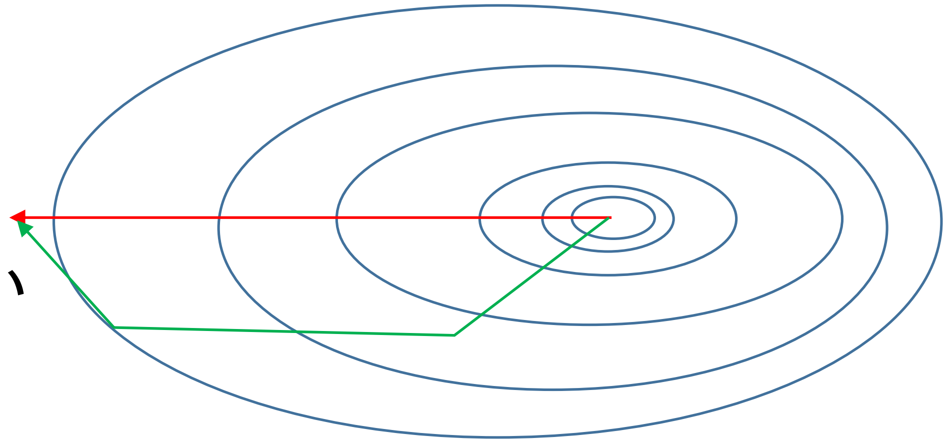
$$=\int_0^1(3t^2)dt=\left[\frac{3}{3}t^3\right]_0^1=1$$

曲線経路では $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}$

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\begin{pmatrix}x^2\\y^2\\z^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}=\int_0^1\begin{pmatrix}t^2\\t^4\\t^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\2tdt\\3t^2dt\end{pmatrix}$$

$$=\int_0^1(t^2+2t^5+3t^8)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{6}t^6+\frac{3}{9}t^9\right]_0^1=1$$

この違いは何か？



等高線の世界では、経路にはよらない

等高線の世界？　位置ポテンシャルのような世界？　電位のような世界？

電場ベクトルEは電位ϕの勾配　$\vec{E} = \nabla\phi$

ベクトル関数がスカラー関数の**勾配**で書けるとき、経路によらない

演算子ナブラ：$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$　$\vec{E} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$

$$\int_L \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_L \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_L \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \int_L d\phi = \phi(B) - \phi(A)$$

では、$\vec{E} = \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{pmatrix}$だとすると

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{0.1}^{1} \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_{0.1}^{1} \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \\ 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dt \\ dt \end{pmatrix}$$

$$= \int_{0}^{1} \left(3\frac{1}{t} \right) dt = [3\ln(t)]_{0.1}^{1} = 3\ln(10)$$

曲線経路では $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$

Xが0.1~1, t 0.1~1
yが0.1~1, t^2 0.1~1ならば$0.1^{0.5}$~1
z が0.1~1, t^3 0.1~1ならば$0.1^{1/3}$~1

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{0.1}^{1} \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_{0.1}^{1} \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t^2 \\ 1/t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ 2t\,dt \\ 3t^2 dt \end{pmatrix}$$

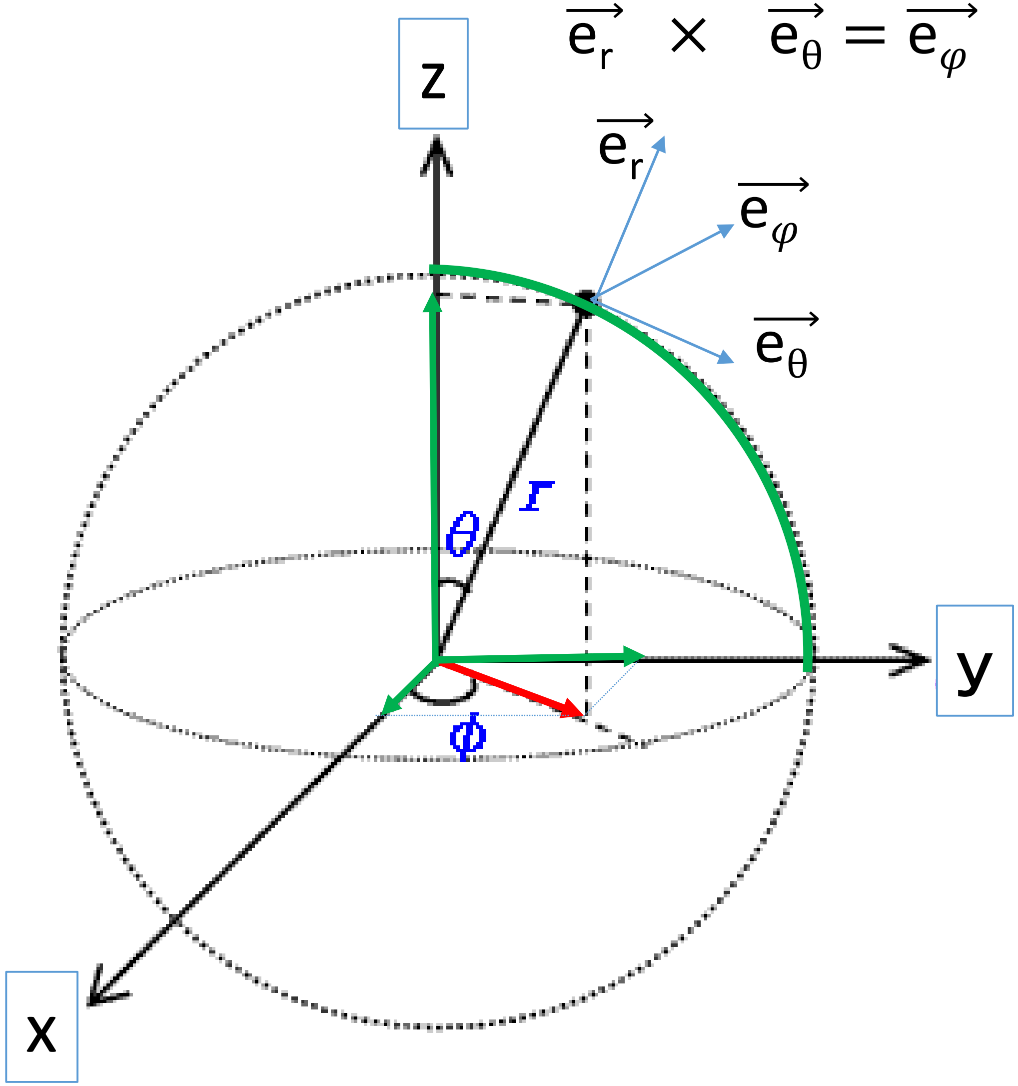
$$= \int_{0.1}^{1} \left(\frac{1}{t} + 2\frac{1}{t} + 3\frac{1}{t} \right) dt = [6\ln(t)]_{0.1}^{1} = 6\ln(10)$$

Φ=log(x)+log(y)+log(z), $\nabla\phi$=(1/x,1/y,1/z)なので直線経路と等しい

極座標表示　復習　媒介変数(r,θ,φ)

$\vec{r}(r,\theta,\varphi):(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi\,,r\ \sin\theta\sin\varphi\,,r\cos\theta)$

$\overrightarrow{e_r}\ \times\ \overrightarrow{e_\theta}=\overrightarrow{e_\varphi}$



X,Y平面上への$\vec{r}$の射影成分
大きさはr sinθ

X=　r sinθcosϕ
Y=　r sinθsinϕ

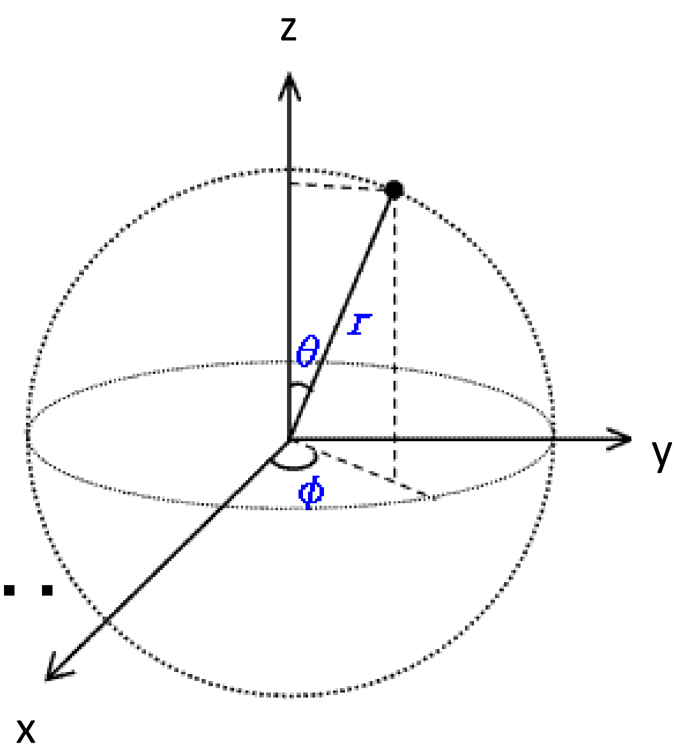
$(0\le\theta\le\pi/2, 0\le\varphi\le2\pi)$半球面
$(0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le2\pi)$全球面

なぜ極座標必要？　例題

- 半球面S：$\vec{r}(x, y, z)$ $x^2+y^2+z^2=a^2$ この面積を求めるには

- このとき変数をx,y,zと考えると…

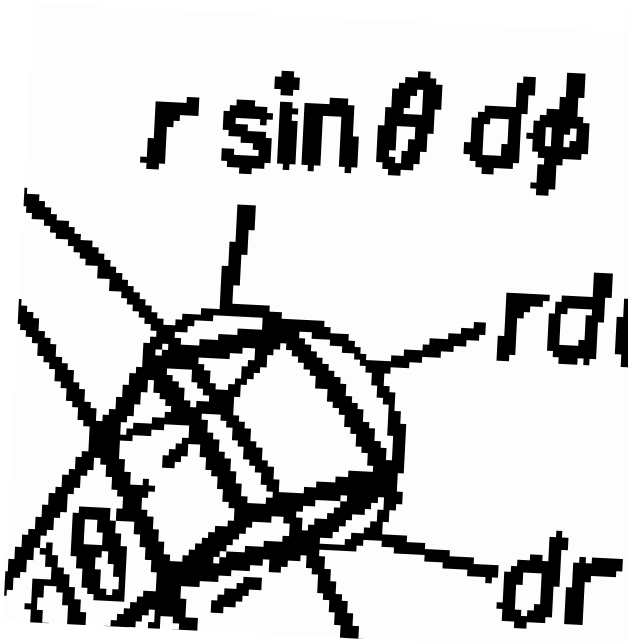
$$\iiint_D dxdydz$$

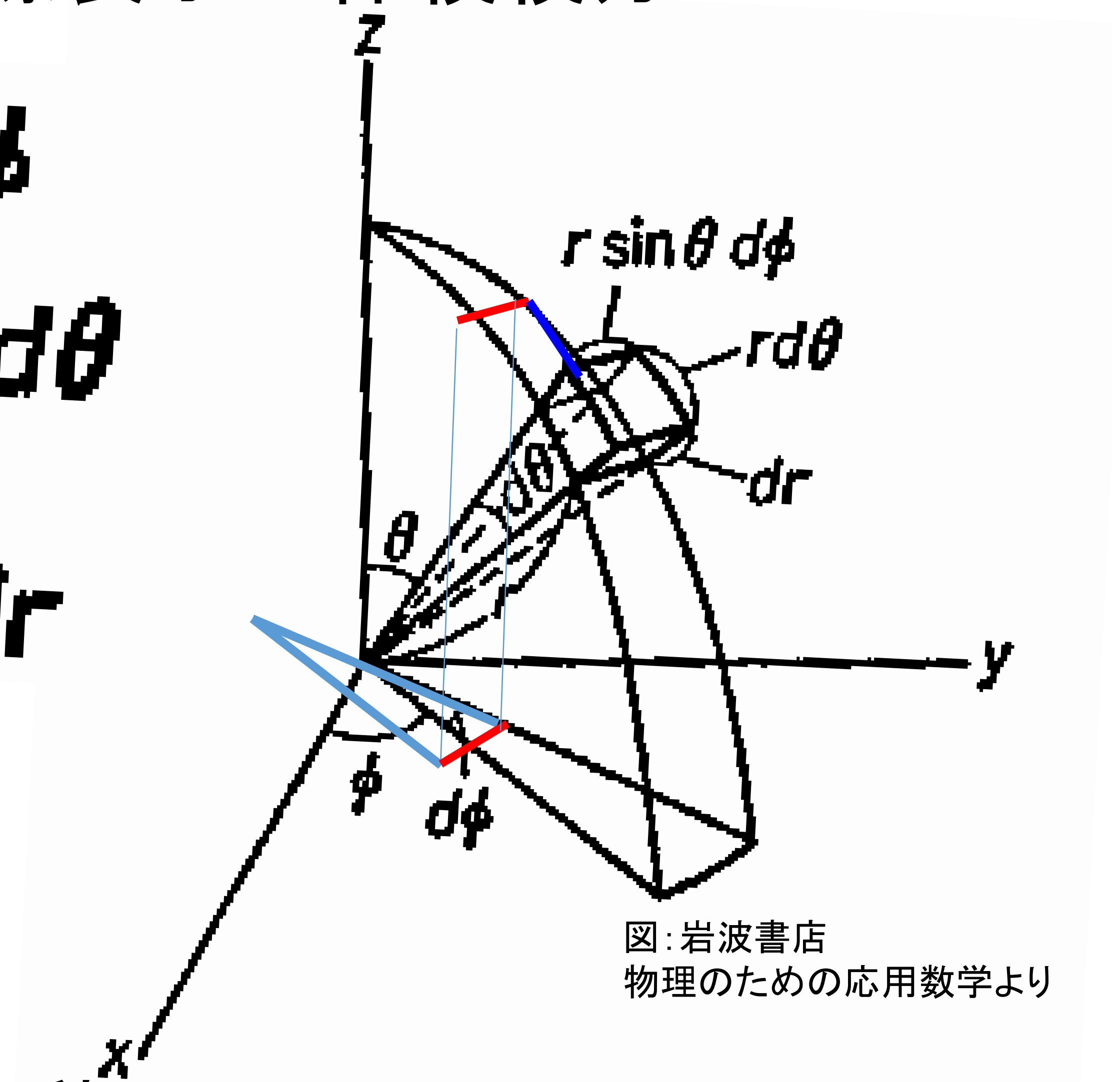


dx,dy,dz積分範囲分からない・・・

$\iiint_D f(r, \theta, \varphi)$ $d\mathrm{r}d\theta d\varphi$ としたいが．．．．

図で見る極座標表示の体積積分





図：岩波書店
物理のための応用数学より

ヤコビアン

$$|J| = \frac{(\partial x, \partial y, \partial z)}{(\partial r, \partial \theta, \partial \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

面積：　Ds=rdθ r sin θ dϕ　= $r^2 \sin \theta \, d\theta d\phi$

体積：　Dsdr=dV= $r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi$

3変数で$\vec{r}$ *(x,y,z)*が与えられたら

$(x(r,\theta,\varphi), y\,(r,\theta,\varphi), z\,(r,\theta,\varphi))$

例えば$(r\sin\theta\cos\varphi\,, r\ \sin\theta\sin\varphi\,, r\cos\theta)$

スカラーの体積積分

$$\int_V \mathrm{f(r)}d\mathrm{v} = \iiint_D f(r,\theta,\varphi)|\mathrm{J}|drd\theta d\varphi$$

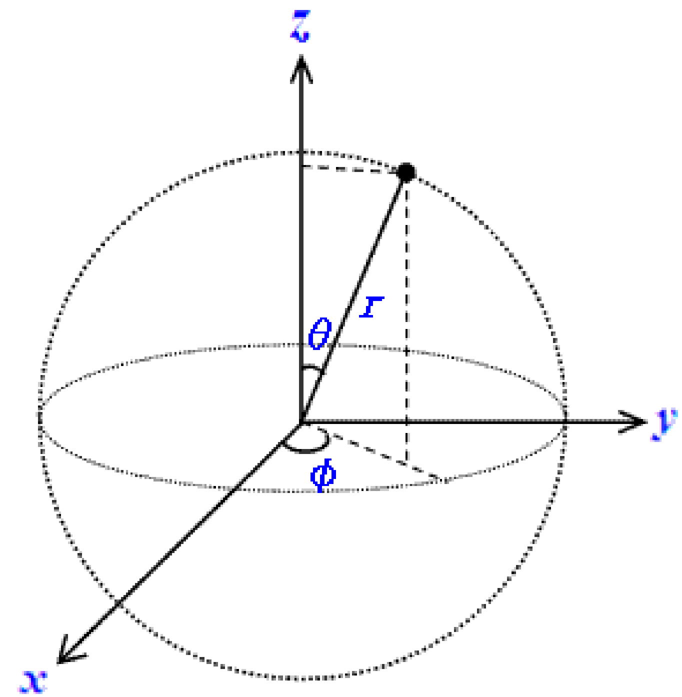
ヤコビアン

$$|\mathrm{J}| = \frac{(\partial x,\partial y,\partial z)}{(\partial r,\partial\theta,\partial\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix}$$

例題

- 半球面S:$\vec{r}(\theta,\varphi)=(r\,sin\,\theta\cos\varphi\,,r\ \sin\theta\sin\varphi\,,r\cos\theta)$
  $(0\leq\theta\leq\pi/2, 0\leq\varphi\leq 2\pi)$の面積を求めよ
- この時媒介変数はθ,φ

$$\boxed{\int_S \mathrm{ds}=\iint_D \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| d\theta d\varphi}$$



$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=r(\cos\theta\cos\varphi\,,\cos\theta\sin\varphi\,,-\sin\theta)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=r(-sin\,\theta\sin\varphi\,,\ \sin\theta\cos\varphi\,,0)$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-sin\,\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=r^2\begin{vmatrix} i & j & k\\ \cos u\cos v & \cos u\sin v & -\sin u\\ -sin\,u\sin v & \sin u\cos v & 0\end{vmatrix}$$

$=r^2(sin^2\,\theta\cos\varphi, sin^2\,\theta\,sin\,\varphi,\ sin\,\theta\,cos\theta\cos^2\varphi+sin\,\theta\,cos\theta\sin^2\varphi)$

$=r^2(sin^2\,\theta\cos\varphi, sin^2\,\theta\,sin\,\varphi, sin\,\theta\,cos\theta)$

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = r^2\sqrt{sin^4\theta\cos^2\varphi + sin^4\theta\sin^2\varphi + sin^2\theta\, cos^2\theta}$$

$$=r^2\sqrt{sin^4\theta + sin^2\theta\, cos^2\theta}$$

$$=r^2\sqrt{sin^2\theta}=\mathrm{r}^2\, sin\,\theta$$

したがって面積は

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| d\theta d\varphi$$ であり　$(0\le\theta\le\pi/2, 0\le\varphi\le 2\pi)$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r^2\, sin\,\theta\, d\theta d\varphi$$

$$= 2\pi r^2\int_0^{\pi/2} sin\,\theta\, d\theta$$

$$=2\pi r^2$$

$f(r)=(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}, 0,0)$として積分すると有名なクーロンの法則

これが体積の場合は3変数$\vec{r}(r,\theta,\varphi)$

$$V=\iiint dxdydz = \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r^2\, sin\,\theta\, drdd\theta d\varphi$$ となる…

例題　体積

半径aの球の体積を極座標を用いた積分から求めよ

- V : $\vec{r}(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi\,, r\ \sin\theta\sin\varphi\,, r\cos\theta)$
  $(0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi)$

体積要素：　dV= $r^2 \sin\theta$ dθdϕdr

V= $\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta$ dθdϕdr であり

$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{r}^2 sin\,\theta\, d\theta d\varphi dr$

$= 2\pi \int_0^a \int_0^{\pi} \mathrm{r}^2\, sin\,\theta\, d\theta\, dr$

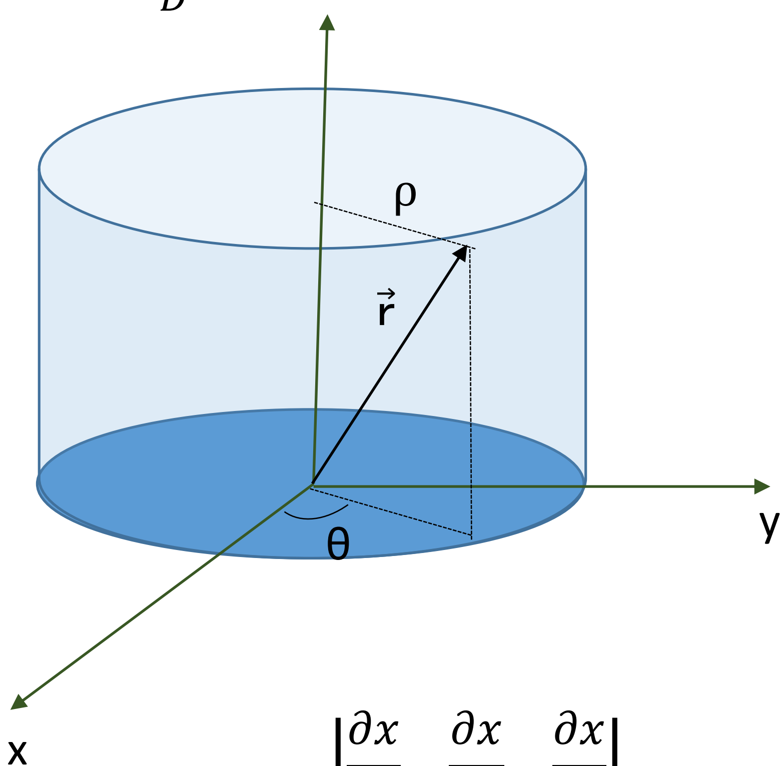
$=4\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a$

$=\frac{4}{3}a^3$

密度関数がスカラー関数f(r,θ,φ)=1+rであらわされるとすると、
積分すれば質量が計算できる

円柱座標　$\vec{r}(\rho,\theta,z)=(\rho\cos\theta\,,\rho\sin\theta\,,z)$

$$\int_V f(r)dv=\iiint_D \varphi(\rho,\theta,z)|J|d\rho d\theta dz$$



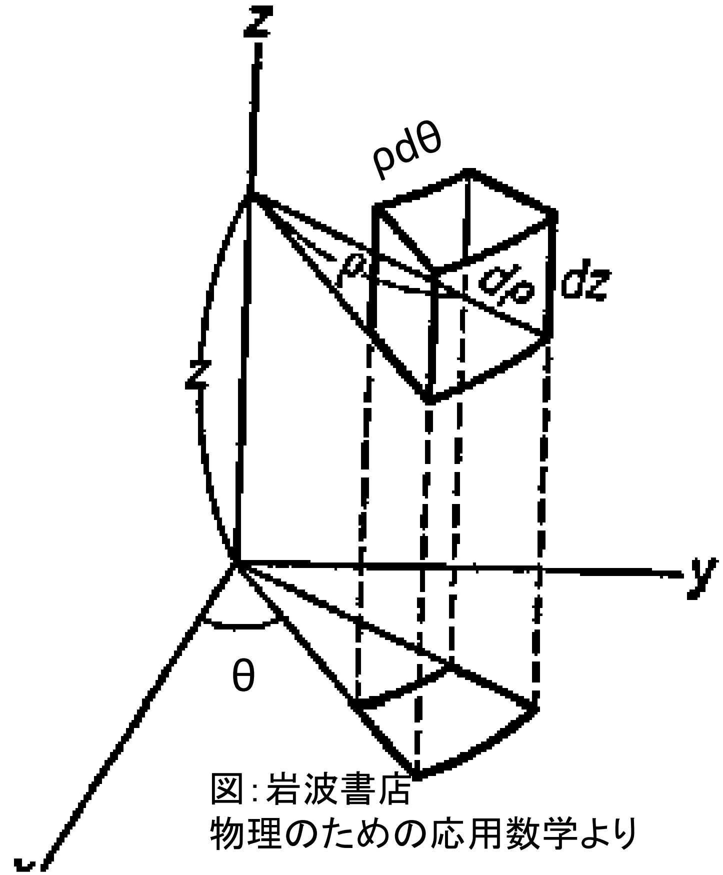


図:岩波書店
物理のための応用数学より

$$|J|=\frac{(\partial x,\partial y,\partial z)}{(\partial\rho,\partial\theta,\partial z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}$$

ヤコビアン

図よりds=rdθdz
dV=rdθdzdr

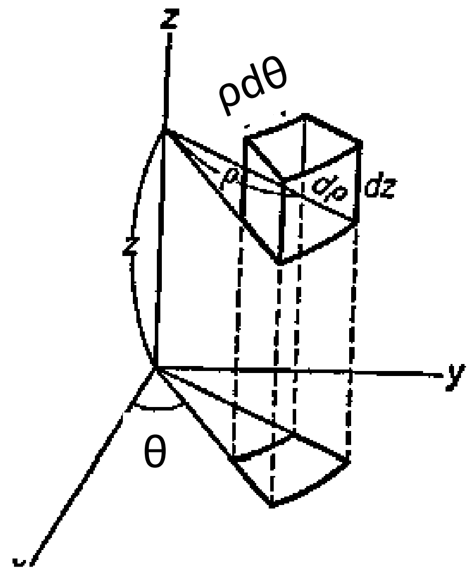
演習

(1)以下の円柱の側面の面積を積分からもとめよ

$\vec{r}(\theta, z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z)$

$(0 \le z \le b, 0 \le \theta \le 2\pi), a, b, > 0$

(2)(1)面上でのスカラー量$\cos^2\theta$の面積分を求めよ



$$\int_S \mathrm{f(r)}ds = \iint_D \varphi(u,v)\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| dudv$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = (-asin\theta, acos\vartheta, 0), \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = (0,0,1)$$

$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|$=$|(acos\theta, asin, 0)|$=a

または図よりds=rdθdz

(1) $\int_S \mathrm{f(r)}ds = \int_0^b \int_0^{2\pi} ad\theta dz = 2\pi ab$

(2) $\int_S \mathrm{f(r)}ds = \int_0^b \int_0^{2\pi} acos^2\theta d\theta dz = ab\int_0^{2\pi}\frac{1+cos2\theta}{2}d\theta$

=$ab\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}sin2\theta\right]_0^{2\pi} = \pi ab$

勾配・発散・回転　復習

ナブラ: $\vec{\nabla}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$

$grad\ \varphi=\nabla\varphi=(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z})$

$div\ \vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

$rot\ \vec{A}=\nabla\times\vec{A}=(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})$　　curlとも呼ぶ

ラプラシアン: $\Delta=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$これはこのままでは極座標系や円柱座標系では使用できない…

前回の講義でラプラシアンの極座標変換を行っていた。