米田、戸倉川 月、7限1930～2100、西5-109

応用数学 A

積分定理

Gaussの定理 $\int divBdV = \int B \cdot ndS$

Stokesの定理 $\int \nabla \times E \cdot bdS = \int E \cdot dr$

Greenの定理 $\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy = \int_C (fdx + gdy) = \int_C \left(f\vec{e_i} + g\vec{e_j}\right) \cdot \overrightarrow{dr}$

Gaussの発散定理 $\int_S n \times FdS = \int_V \nabla \times FdV$

1777-1855　ドイツ

Johann Carl Friedrich Gauss

Gaussの磁場の単位
Gaussian 分布

1819-1903　アイルランド

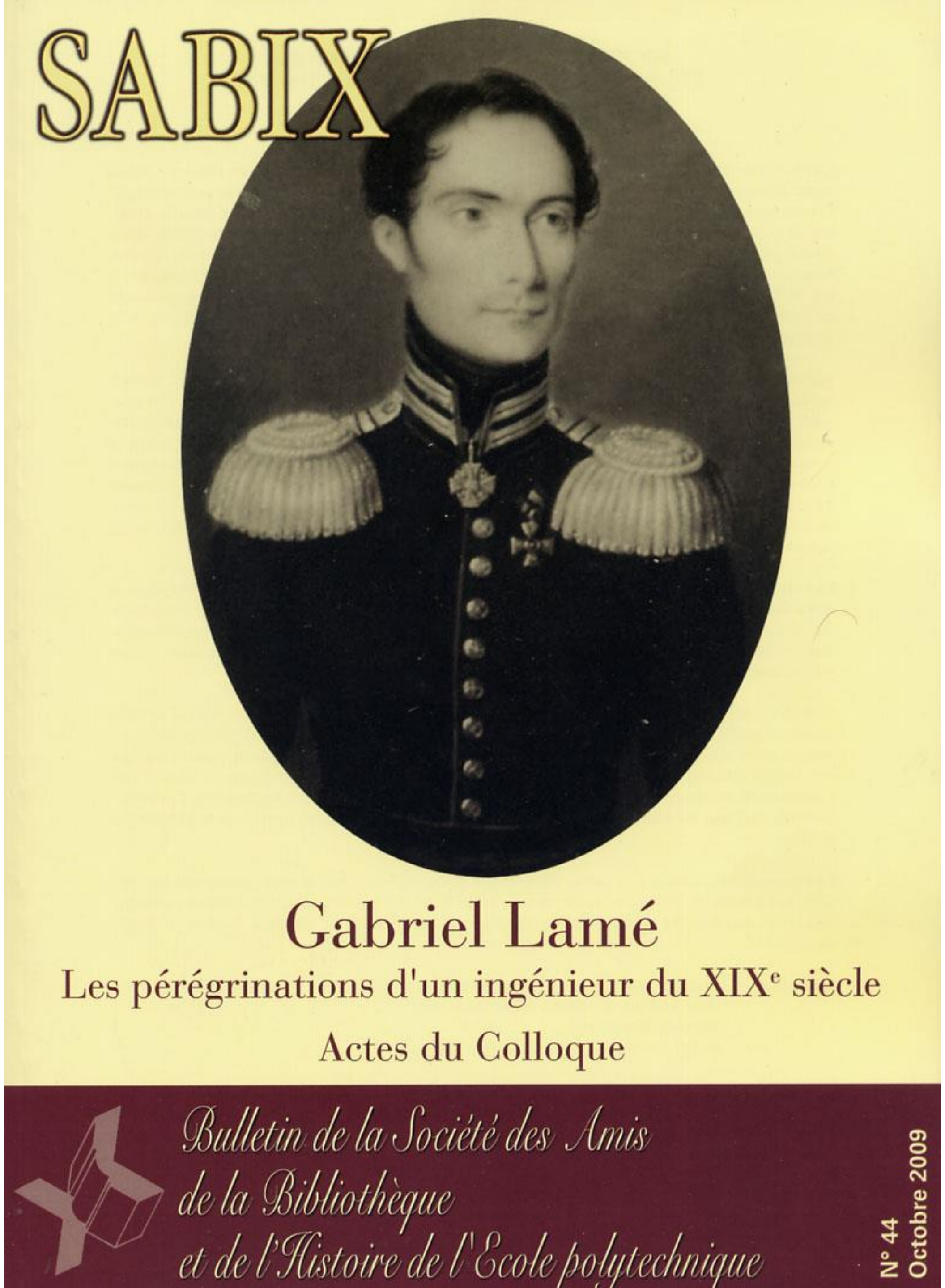
Sir George Gabriel Stokes

Navier–Stokes equations
Stokes 光

George Green

1793 — 1841

Green theory
Green function

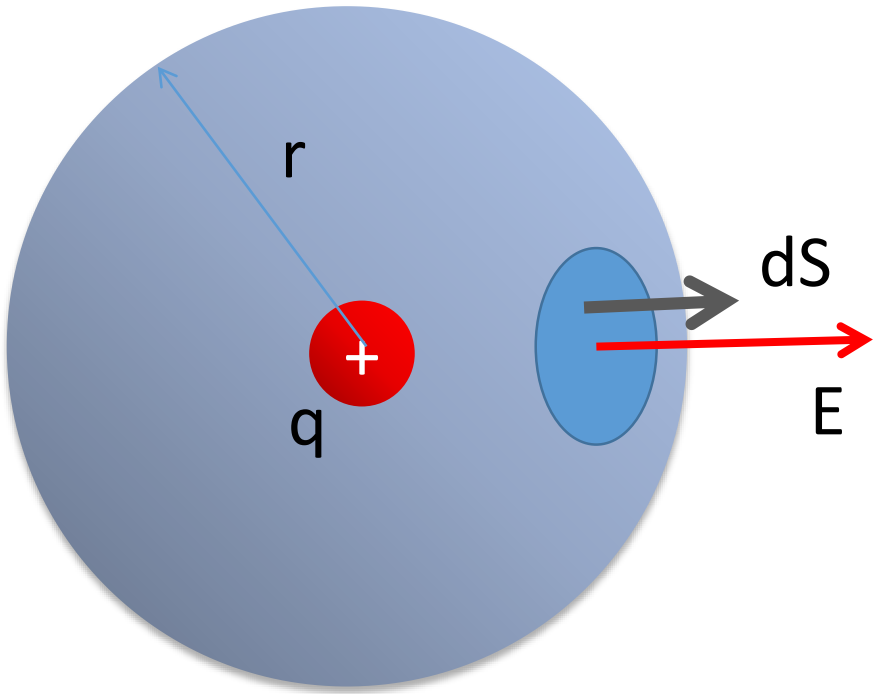


1795年7月22日 - 1870年5月1日

- ラメ定数
- ラメ関数

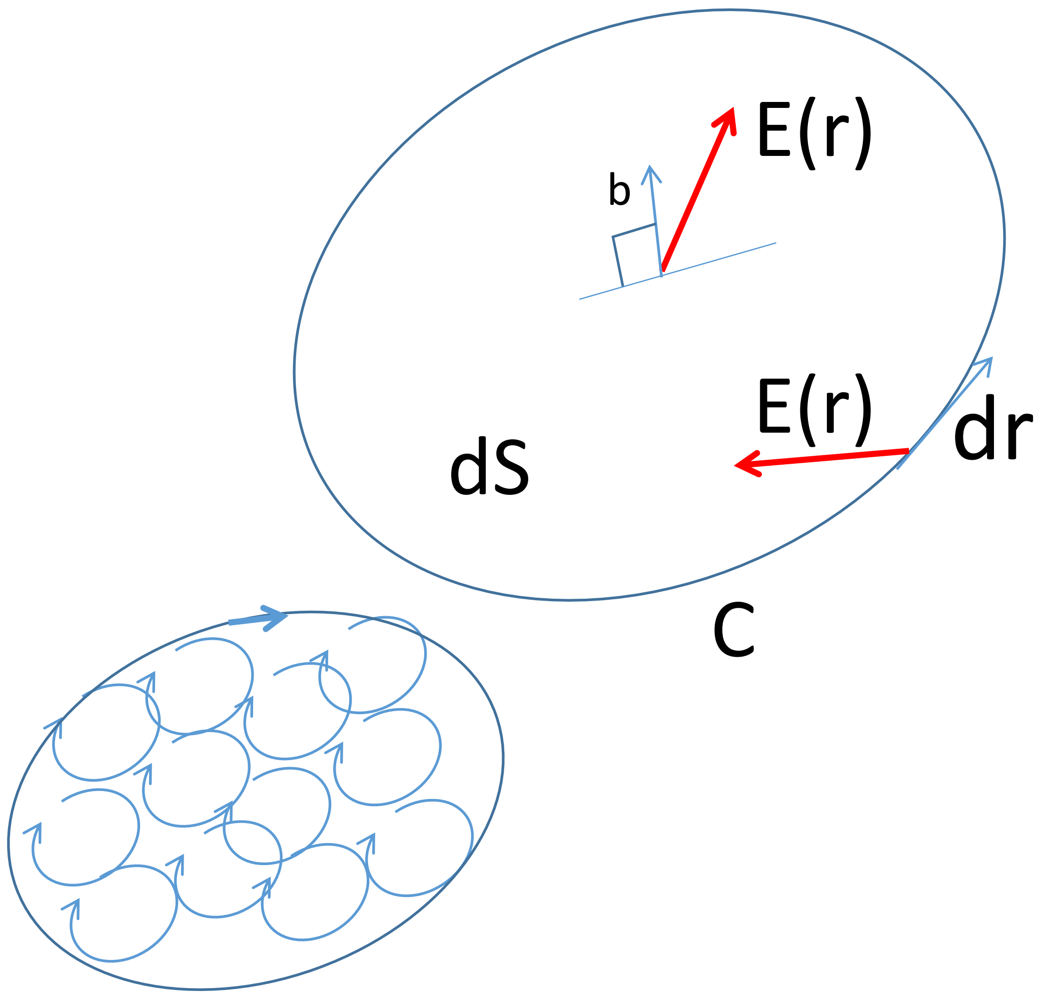
共立出版
ロマルフスキー著
応用数学の基礎　など

Gaussの定理 $\int divBdV = \int B \cdot ndS$

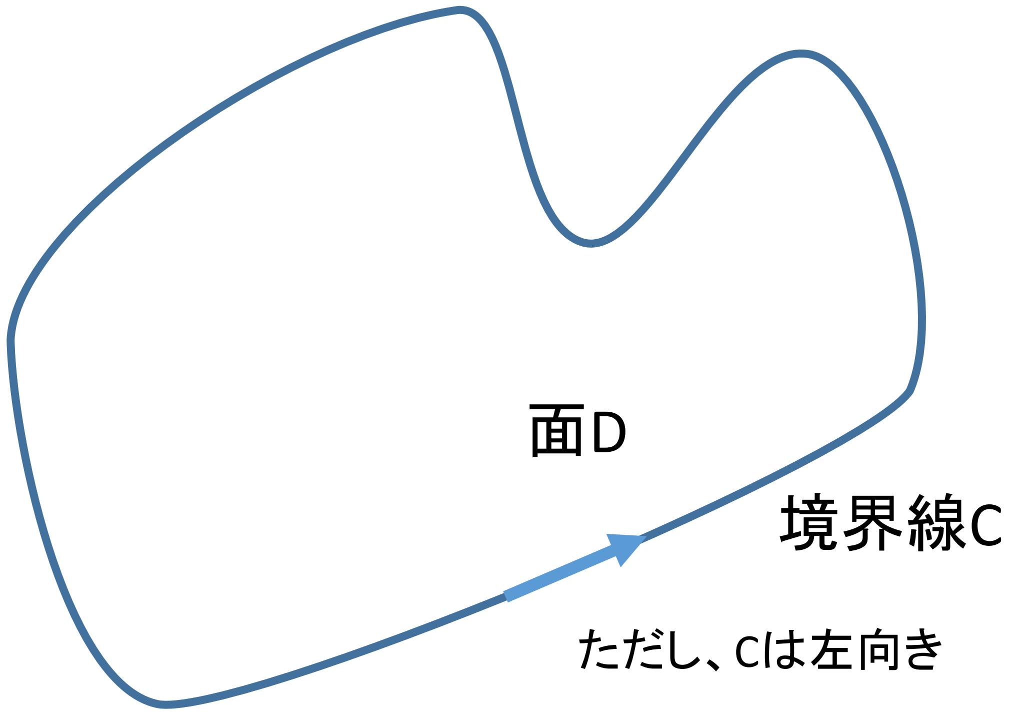


Greenの定理へ

Stokesの定理 $\int_S \nabla \times E \cdot b dS = \int_C E \cdot dr$



Green　の　定理



$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_C \left(fdx + gdy\right) = \int_C \left(f\vec{e_i} + g\vec{e_j}\right) \cdot \overrightarrow{dr}$$

Gaussの定理の証明

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \int_C \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS$$

Gauss の定理　証明

1. 例えば　$\vec{A} = \begin{pmatrix} \phi(x,y) \\ -\psi\,(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$　とする

左辺＝

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \int_V \left(\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial\psi\,(x,y)}{\partial y}\right) dxdydz = \int_{X-Y} \left(\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial\psi\,(x,y)}{\partial y}\right) dxdy \times \Delta z$$

$$\int_{S1} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) dxdy = \int_C (\phi dy - \psi dx)$$

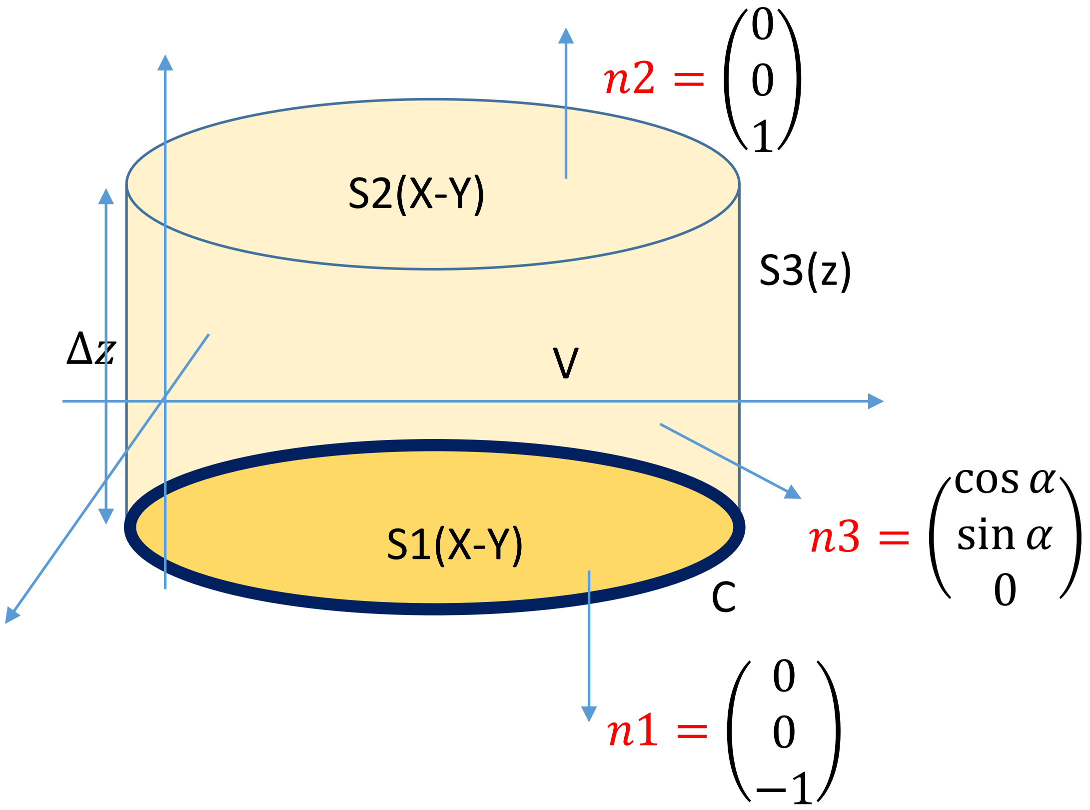
Gaussの定理の証明

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \int_C \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS$$

Gauss の定理

1. $\vec{A} = \begin{pmatrix} \phi(x,y) \\ -\psi\,(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$

2. 積分を以下の円筒と考える



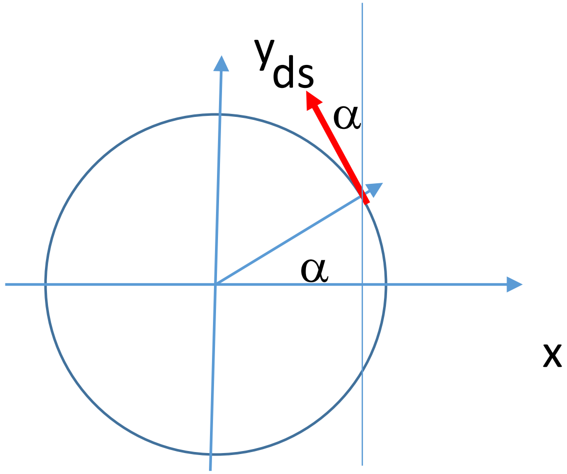
$$\int_C \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{S1} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS + \int_{S2} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS + \int_{S3} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= \int_{S3} (\phi\cos\alpha - \psi\sin\alpha)\, dS = \Delta z \int_C \; (\phi\cos\alpha - \psi\sin\alpha)\, ds$$

dy　　dx

$$= \Delta z \int_C \; (\phi dy - \psi dx)$$

$$\int_{S1} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) dxdy = \int_C \; (\phi dy - \psi dx)$$



Gaussの定理の証明

$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \int_C \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

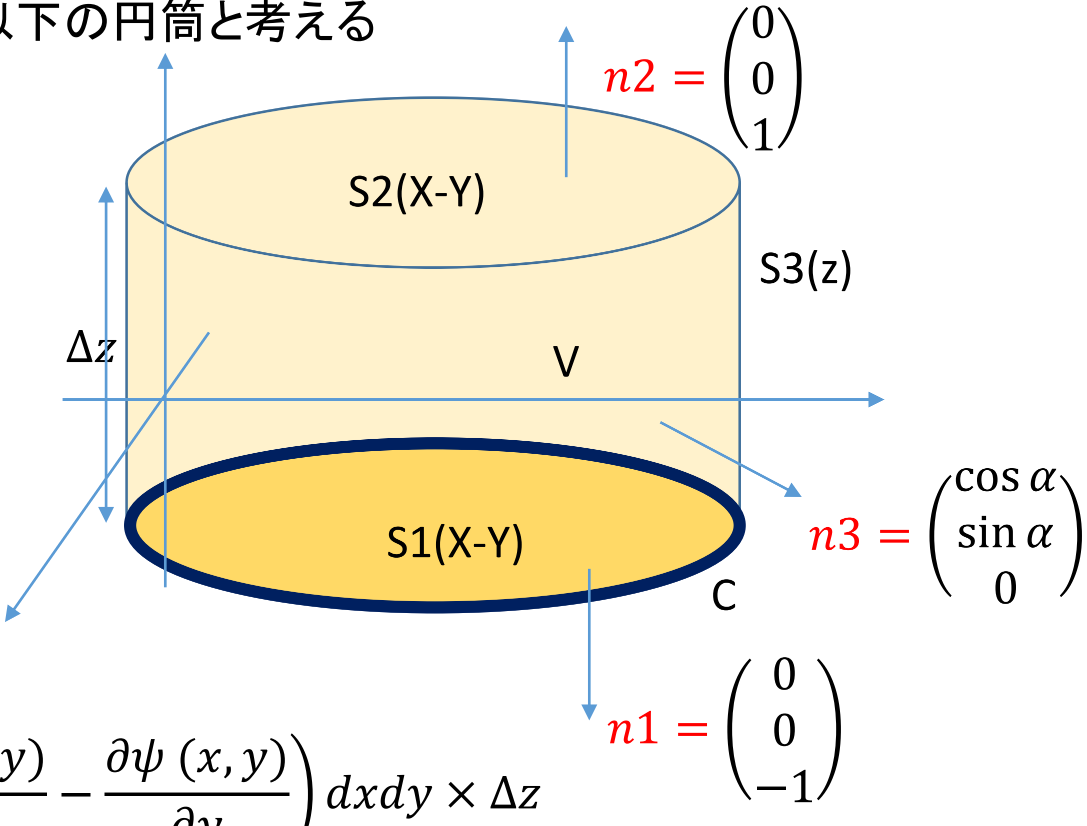
Gauss の定理

1. 例えば

$$\vec{A} = \begin{pmatrix}\phi(x,y)\\ -\psi\,(x,y)\\ 0\end{pmatrix}$$

とする

2. 積分を以下の円筒と考える



証明

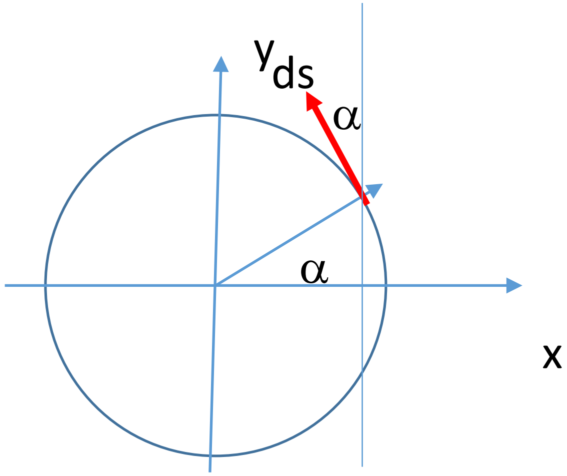
$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \int_V \left(\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial\psi\,(x,y)}{\partial y}\right)dxdydz = \int_{X-Y}\left(\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial\psi\,(x,y)}{\partial y}\right)dxdy\times\Delta z$$

$$\int_C \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{S1}\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS + \int_{S2}\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS + \int_{S3}\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \int_{S3}(\phi\cos\alpha - \psi\sin\alpha)\,dS = \Delta z\int_C(\phi\cos\alpha - \psi\sin\alpha)\,ds$$

dy　　dx

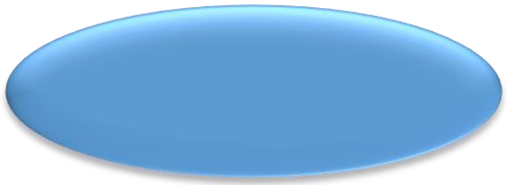
$$= \Delta z\int_C(\phi dy - \psi dx)$$



$$\int_{S1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy = \int_C(\phi dy - \psi dx)$$

ところで法線ベクトルとは

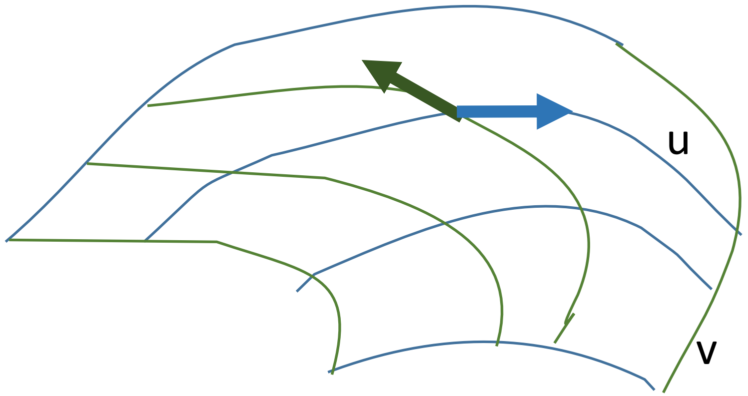
case 1



ある曲面がg(x, y, z)=constantというようにに表されているならば、
法線ベクトルnは

$$n = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}$$

case 2



曲面が$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$で表される時

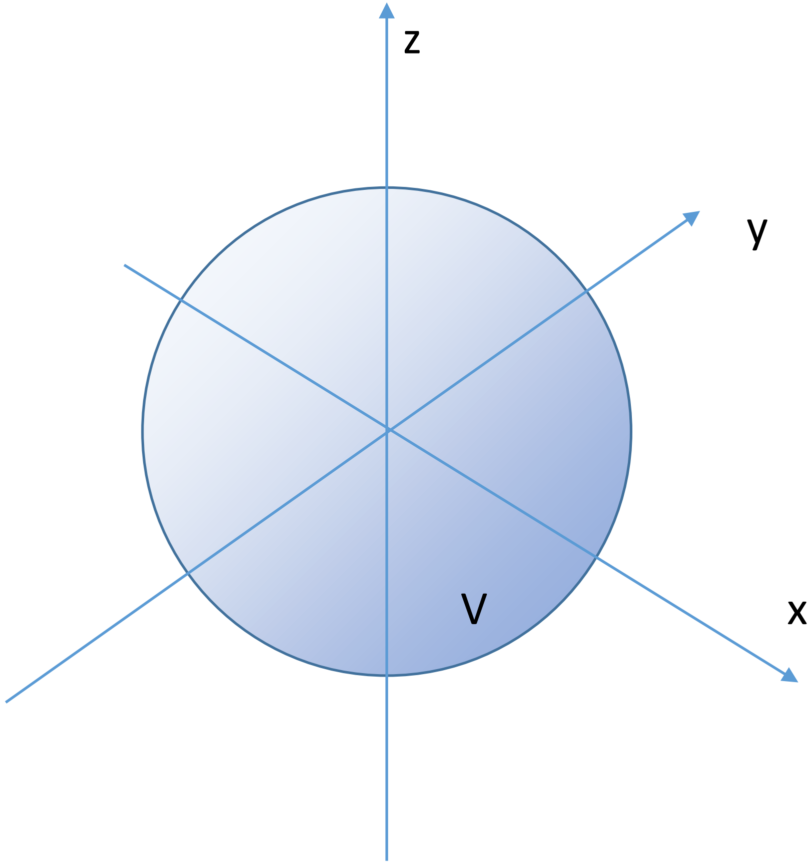
$\frac{d\vec{r}}{du}, \frac{d\vec{r}}{dv}$ を この曲面に接している線として、

$$n = \pm \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}$$ を法線ベクトルとする

使い方

例題1　Gauss の定理

$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \int_C \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$



面積分をx, y 平面に投影させる

V, C を球　$x^2+y^2+z^2=1$

$\vec{\mathrm{A}}$を　$\vec{F} = 4x\vec{e_x} + 4y\vec{e_y} - 2z\vec{e_z}$

とする

法線ベクトルnを求める

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

$$\nabla g = 2xe_x + 2ye_y + 2ze_z$$

$$|\nabla g| = \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2$$

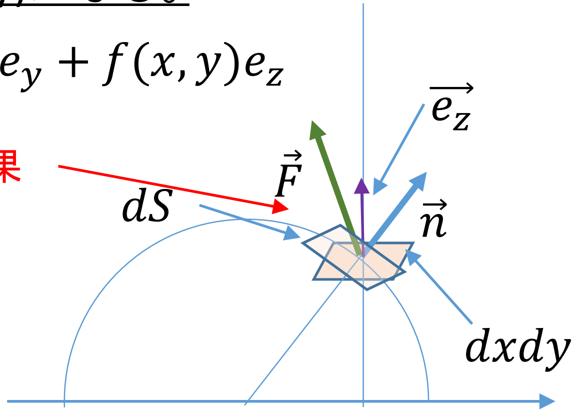
$$\boxed{n = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = (xe_x + ye_y + ze_z)}$$

面が決まる　＝＞(x, y, z) が(x, y)になる。

$$r = xe_x + ye_y + ze_z \Rightarrow xe_x + ye_y + f(x,y)e_z$$

傾いている効果

$$\int_S F\cdot dS = \iint_D F\cdot n\underbrace{\frac{1}{|n\cdot e_z|}dxdy}_{dS}$$



上半分

$$\int_{S上} F\cdot dS = \iint_D F\cdot n\frac{1}{|n\cdot e_z|}dxdy = \iint_D \left((4xe_x+4ye_y-2ze_z)\cdot(xe_x+ye_y+ze_z)\frac{1}{(xe_x+ye_y+ze_z)\cdot e_z}\right)dxdy$$

$$(4x^2+4y^2-2z^2) = 4x^2+4y^2-2(1-x^2-y^2) = 6x^2+6y^2-2$$

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$(\sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$\iint_D 2\frac{3x^2+3y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = \iint_D 2\frac{3r^2-1}{\sqrt{1-r^2}}d\theta rdr = 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{-3(1-r^2)+1}{\sqrt{1-r^2}}rdr$$ = 4π $\boxed{\times 2}$ = 8π

2π

上下

$$\xi = 1-r^2, d\xi = -2rdr$$

$$\int_0^1 3\sqrt{\xi}-\frac{2}{\sqrt{\xi}}d\xi = \left[3\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}-\xi^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 1$$

$$\vec{F} = 4x\overrightarrow{e_x}+4y\overrightarrow{e_y}-2z\overrightarrow{e_z}$$

$$\int_V div\vec{F}dV = \int_V (4+4-2)dV = 6\frac{4\pi}{3} = 8\pi$$

球の体積

これがGaussの定理

演習問題1　S: $x^2+y^2+z^2=9$, $\vec{F}=6x\ \vec{e_x}+6y\vec{e_y}-z\ \vec{e_z}$ としたときに、

$\int_S F\cdot dS$ と $\int_V div\vec{F}dV$ を計算しなさい。

まず $\int_S F\cdot dS$

Step 1 Sの表面の法線ベクトルの関数を求める。

$$\vec{n}=\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$$

$$\nabla g=2xe_x+2ye_y+2ze_z$$

$$|\nabla g|=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=6$$

$$\mathrm{n}=\frac{1}{3}(xe_x+ye_y+ze_z)$$

Step 2 面積分をx, y 平面に投影させる　$\int_{S上}F\cdot dS=\iint_D F\cdot n\frac{1}{|n\cdot e_z|}dxdy$

(1) $\mathrm{F}\cdot\mathrm{n}$ を計算、$|\mathrm{n}\cdot\vec{e_z}|$ を求める。

$$\mathrm{F}\cdot\mathrm{n}=2x^2+2y^2-\frac{1}{3}z^2=\frac{1}{3}\left(6x^2+6y^2-(9-x^2-y^2)\right)=\frac{1}{3}(-9+7(x^2+y^2))$$

$$|n\cdot e_z|=\frac{1}{3}|z|=\frac{1}{3}\sqrt{9-(x^2+y^2)}$$

Step 2 (2)

$\int_S F\cdot dS = \iint_D F\cdot n\frac{1}{|n\cdot e_z|}dxdy$を計算する。($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$　として　$r^2 = x^2 + y^2$を考えて)

$$\iint_D F\cdot n\frac{1}{|n\cdot e_z|}dxdy = \iint_D \frac{-9+7(x^2+y^2)}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}dxdy$$

$$\mathrm{F}\cdot\mathrm{n} = \frac{1}{3}(-9+7(x^2+y^2))$$

$$|n\cdot e_z| = \frac{1}{3}\sqrt{9-(x^2+y^2)}$$

$$dxdy \Leftrightarrow rd\theta dr$$

$$= \iint_D \frac{7r^2-9}{\sqrt{9-r^2}}d\theta rdr = \int_0^{2\pi}d\theta\int \frac{7r^2-9}{\sqrt{9-r^2}}rdr$$

$\xi = 9-r^2, d\xi = -2rdr$　と置くと　Sの境界は、r = 0 -> 3

$$= \pi\int \frac{7(9-\xi)-9}{\sqrt{\xi}}d\xi = \pi\left[54\cdot 2\xi^{1/2} - 7\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right]_0^9 = 198\pi$$

上半分なので、全部のS表面では396π

Step　3　$\int_V div\vec{F}\,dV$　を計算する。　$\vec{F} = 6x\ \vec{e_x} + 6y\vec{e_y} - z\ \vec{e_z}$

$$\mathrm{div\ F} = 6+6-1 = 11$$

$$\int_V div\vec{F}\,dV = 11\boxed{\frac{4\pi}{3}3^3} = 396\pi$$

球のV

やってみましょう

演習問題２

S:　$x^2+y^2+z^2=1$,　$\vec{F}=y\overrightarrow{e_x}-x\overrightarrow{e_y}+z\overrightarrow{e_z}$ としたときに、$\int_S F\cdot dS$ と $\int_V div\vec{F}dV$ を計算

Step1: Sの表面の法線ベクトルの関数を求める。　$\vec{n}=\dfrac{\nabla g}{|\nabla g|}$

Step2: F・n を計算する。|n・$\overrightarrow{e_z}$|を求める。

$$\int_{S上} F\cdot dS=\iint_D F\cdot n\frac{1}{|n\cdot e_z|}dxdy$$ のため

Step 3: $\int_S F\cdot dS=\iint_D F\cdot n\frac{1}{|n\cdot e_z|}dxdy$ を計算する。

途中

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$　として　$r^2=x^2+y^2$

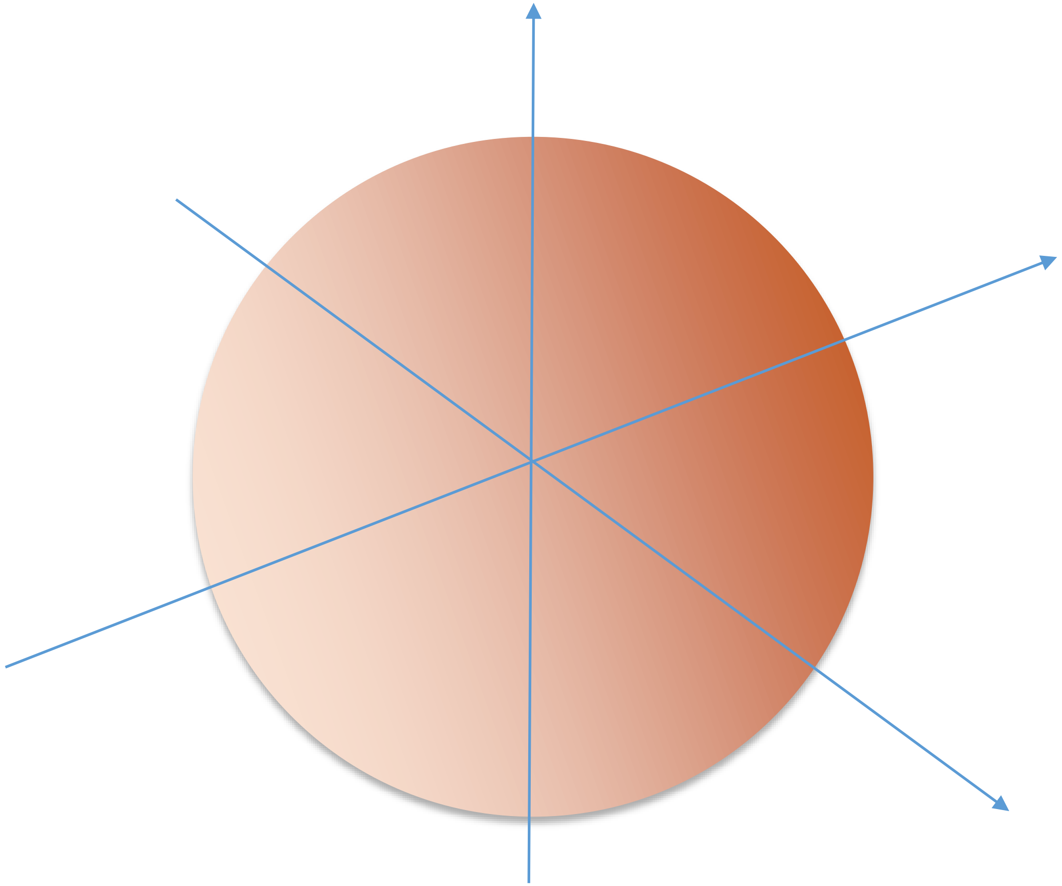
$\xi=1-r^2, d\xi=-2rdr$

Step4: $\int_V div\vec{F}\,dV$　を計算する

Step1: Sの表面の法線ベクトルの関数を求める。

S:　$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$

$$\mathrm{n} = (xe_x + ye_y + ze_z)$$



Step2:　$\mathrm{F}\cdot\mathrm{n}$ を計算する。$|\mathrm{n}\cdot\overrightarrow{e_z}|$を求める。

$$\mathrm{F}\cdot\mathrm{n} = xy - xy + z^2 = (1 - x^2 - y^2) = (1 - (x^2 + y^2)),$$

$$|n \cdot e_z| = |z| = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

Step3: $\int_S \ F \cdot dS = \iint_D \ F \cdot n \frac{1}{|n \cdot e_z|} dxdy$を計算する。

$$\iint_D \ \frac{1-\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dxdy = \iint_D \ \frac{1-r^2}{\sqrt{1-r^2}} d\theta r dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int \ \frac{1-r^2}{\sqrt{1-r^2}} r dr$$

$$= \pi \int \ \frac{\xi}{\sqrt{\xi}} d\xi = \pi \left[\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \pi$$

$$\xi = 1 - r^2, d\xi = -2rdr$$

Step4: $\int_V \ div\vec{F}\, dV$ を計算する。

$$\mathrm{div\ F} = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\int_V \ div\vec{F}\, dV = 1\,\frac{4\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\frac{4}{3}\pi = \int_S \ F \cdot dS = \iint_D \ F \cdot n \frac{1}{|n \cdot e_z|} dxdy = \frac{2}{3}\pi \times 2$$

Gaussの発散定理の場合

$$\int_S n \times F dS = \int_V \nabla \times F dV$$

VをS:$x^2 + y^2 + z^2 = 4$　で囲まれる内部とする。

$F = ye_x - xe_y + ze_z$　　とする。

$$\int_V \nabla \times F dV =$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix} = -2e_z$$

$$-2e_z \int_V dV = -2e_z \frac{4\pi}{3} 2^3 = -\frac{64\pi}{3} e_z$$

$$\int_S n \times F dS = -\int_{S1} F \times n dS - \int_{S2} F \times n dS$$

Vを$S: x^2+y^2+z^2=4$ で囲まれる内部

法線ベクトルn

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

$$\nabla g = 2xe_x+2ye_y+2ze_z$$

$$|\nabla g| = \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 4$$

$$n=\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{1}{2}(xe_x+ye_y+ze_z)$$

$$n\cdot e_z = \frac{1}{2}\left(xe_x+ye_y+ze_z\right)\cdot e_z = \frac{z}{2}$$

$$(F\times n) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ y & -x & z \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-zx-yz)e_x+\frac{1}{2}(zx-yz)e_y+\frac{1}{2}(x^2+y^2)e_z$$

$$\int_{S1} F\times n dS = \frac{e_x}{2}\int_{S1}(-zx-yz)dS+\frac{e_y}{2}\int_{S1}(zx-yz)dS+\frac{e_z}{2}\int_{S1}((x^2+y^2)dS$$

$$\frac{e_x}{2}\int_S (-zx-yz)dS = \iint_D (-zx-yz)\frac{1}{|n\cdot e_z|}dxdy = -2\iint_D (x+y)dxdy = -2\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^2 r^2dr = 0$$

$$\frac{e_y}{2}\int_S (zx-yz)dS = 0$$

$$\frac{e_z}{2}\int_S ((x^2+y^2)dS = \iint_D (x^2+y^2)\frac{1}{|n\cdot e_z|}dxdy = 2\iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy = 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}rdr$$

4π

$$\xi = 4-r^2, d\xi = -2rdr$$

$$= \int_0^4\frac{4-\xi}{\sqrt{\xi}}d\xi = \int_0^4\left(4\xi^{-1/2}-\xi^{1/2}\right)d\xi = \left[4\,2\xi^{1/2}-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

$$= \frac{64}{3}\pi$$

$$\int_{S1} F\times dS = \frac{64}{3}\pi\frac{e_z}{2} = \frac{32\pi}{3}e_z$$

$$\int_S n\times FdS = \int_V \nabla\times FdV$$

Gaussの発散定理