電磁波工学 IV

電磁波の発生

米田仁紀

1888 電磁波の発見:ヘルツの火花放電実験

送信アンテナの火花放電

＝アンテナ間の電場(電位差)が大きくなって放電

受信アンテナでも火花放電が生じた

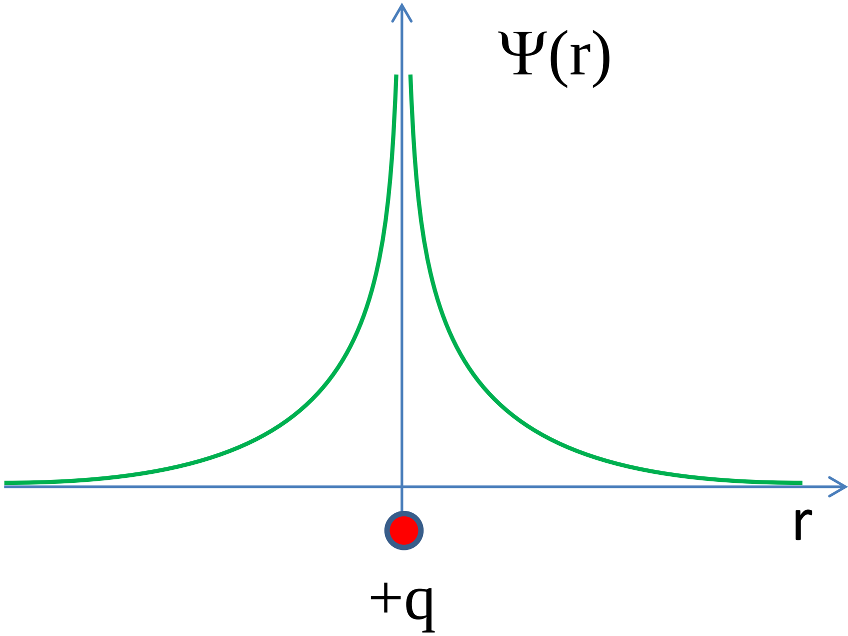
＝アンテナ間の電場(電位差)が生じた

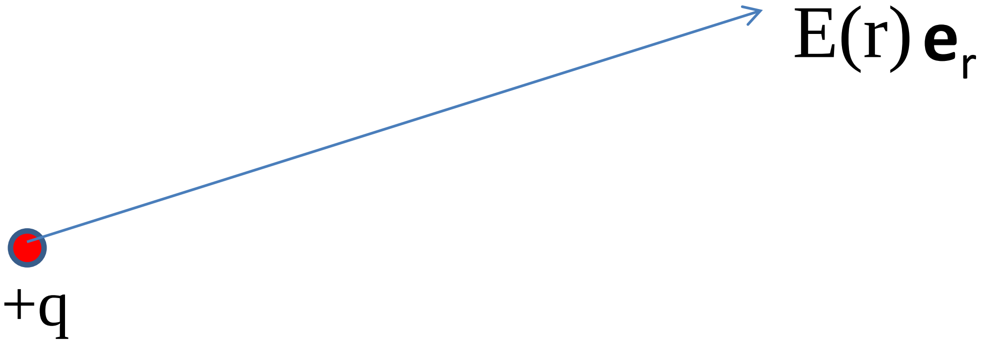
電磁波放射

の前に　静電場のおさらい

$$\psi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$E(r) = -\nabla\psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{e}_r$$





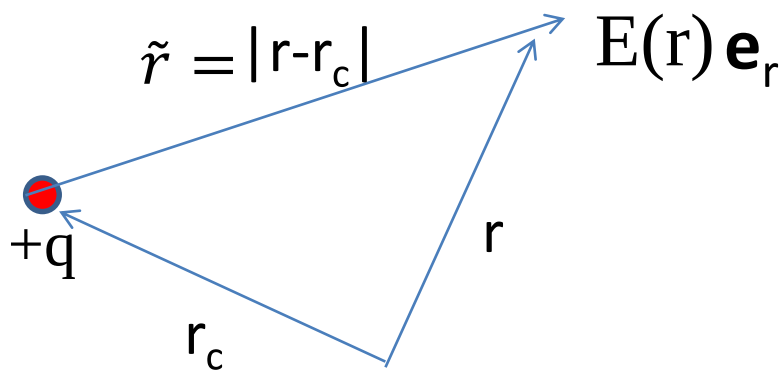
これは、電磁波ではない

電荷量が変動すると

$$\psi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

1. $\Psi(r) \Rightarrow \Psi(r,t)$
2. $q(r_c) \Rightarrow q(r_c, t-|r-r_c|/c)$

遅延ポテンシャル
retardation



$$\Psi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(t-\frac{\tilde{r}}{c})}{\tilde{r}}$$

この場合もE(r, t)は、$-\nabla\Psi(r,t)$ で計算可能

電荷量が<u>変動</u>すると(cont.)

遅れ時間

$$E(r,t) = -\nabla\Psi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{q(t-\frac{r}{c})}{r}$$

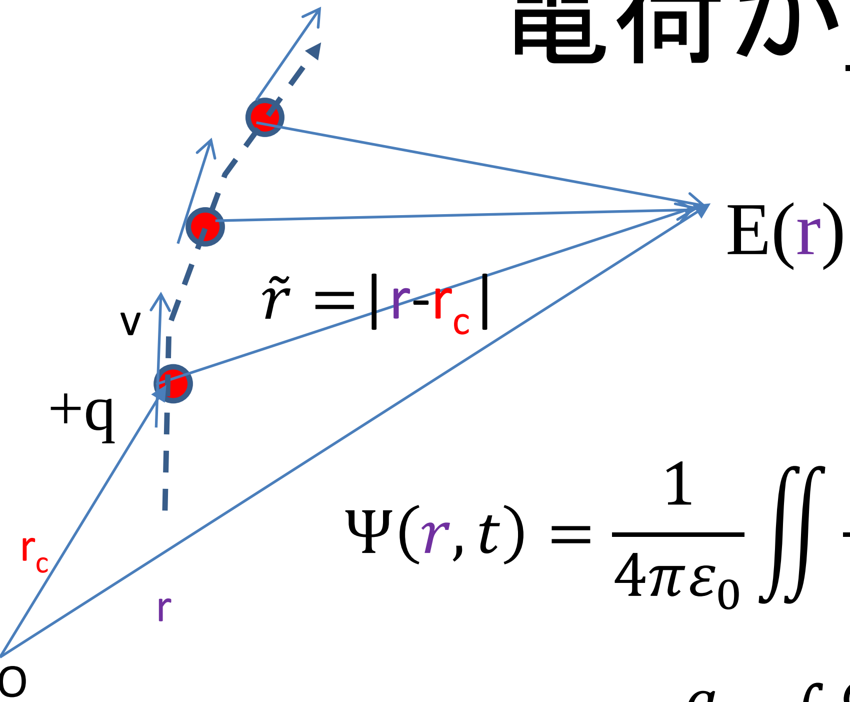
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial r} - \frac{q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^2}\right)\mathbf{e}_r$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial r}\frac{\partial q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial\left(t-\frac{r}{c}\right)} + \frac{q(t-\frac{r}{c})}{r^2}\right)\mathbf{e}_r$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\dot{q}}{cr} + \frac{q(t-\frac{r}{c})}{r^2}\right)\mathbf{e}_r$$

遠方まで続く解

電荷が運動すると



それぞれの時刻での荷電粒子の
電場の影響を重ね合わせる

$\mathbf{e}_r$　$\rho(r,t) = q\delta(r - r_0)$ r_0にある電荷

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\rho(r',t')}{|r - r'(t')|}\delta\left(t' - t + \frac{|r - r'|}{c}\right)dt'dV'$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\delta(t' - t + \frac{|r - r_0(t')|}{c})}{|r - r_0(t')|}dt'$$

空間の積分

$\xi = t' - t + \frac{|r - r_0(t')|}{c}$ と変数変換

$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r_0}(t')$

$= (t - t')c$

$$d\xi/dt' = d(t' - t + \frac{|r - r_0(t')|}{c})/dt'$$

$$= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial r_0}\frac{dr_0}{dt'} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial \mathbf{R}}\cdot \mathbf{v_0}(t')$$

$$= 1 - \frac{1}{cR(t')}\mathbf{R}(t')\cdot \mathbf{v_0}(t')$$

電荷が運動すると(cont.)

ξ=t'-t+$\frac{|r-r_0(t')|}{c}$

$d\xi/dt'$=d(t'-t+$\frac{|r-r_0(t')|}{c}$)/dt'

=1-$\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial r_0}\frac{dr_0}{dt\prime} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial \mathrm{R}} \cdot \mathbf{v}_0(t')$

$= 1 - \frac{1}{cR(t')}\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}_0\,(t')$

$$\Psi(r,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\delta(t' - t + \frac{|r - r_0(t')|}{c})}{|r - r_0(t')|}dt'$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\xi \quad \frac{1}{R(t')}\frac{\delta(t' - t + \frac{R(t')}{c})}{\left(1 - \frac{1}{cR(t')}\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v_0}(t')\right)}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\xi \frac{\delta(t' - t + \frac{R(t')}{c})}{\left(R(t') - \frac{1}{c}\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v_0}(t')\right)}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(R(t') - \mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v_0}(t')/c\right)}$$

スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

Maxwell eq.

ベクトルポテンシャルの定義？ $B = \nabla \times A$

$$\nabla \cdot B = \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \Psi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

磁荷

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

電荷

Poisson 方程式 $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Faraday 電磁誘導 の法則

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Ampere の法則

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot d\mathbf{S} = I$$

スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

スカラー

$$\mathbf{E} = -grad\phi$$

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ベクトル

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$$

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{i}$$

電荷が生むスカラーポテンシャル

電流が生むベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャルの類似性から

$$\mathbf{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(r',t-\frac{|r-r'|}{c})}{|r-r_0(t')|}d^3r'$$

$$\mathbf{j}(r,t) = q\mathbf{u_0}\delta(r-r_0)$$

$$= \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{v}_0(t_0)}{\left(R(t') - \frac{1}{c}\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v_0}(t')\right)}$$

$$= \frac{\mathbf{v_0}(t_0)}{c^2}\Psi(\mathbf{r},t)$$

$$\Psi(r,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\delta(t'-t+\frac{|r-r_0(t')|}{c})}{|r-r_0(t')|}dt'$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\frac{1}{R(t')}\frac{\delta(t'-t)}{\left(1-\frac{1}{cR(t')}\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v_0}(t')\right)}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\frac{\delta(t'-t)}{\left(R(t') - \frac{1}{c}\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v_0}(t')\right)}$$

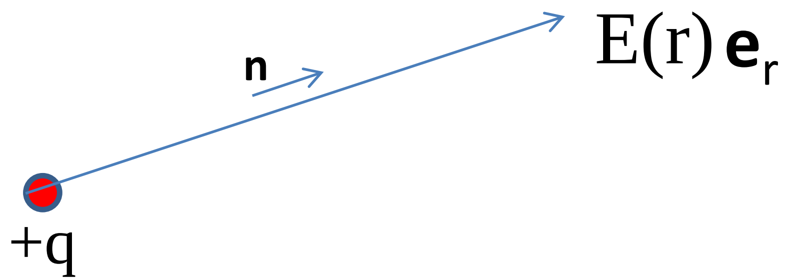
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(R(t_0) - \frac{1}{c}\mathbf{R}(t_0)\cdot\mathbf{v_0}(t_0)\right)}$$

Lienard–Wiechert Potential

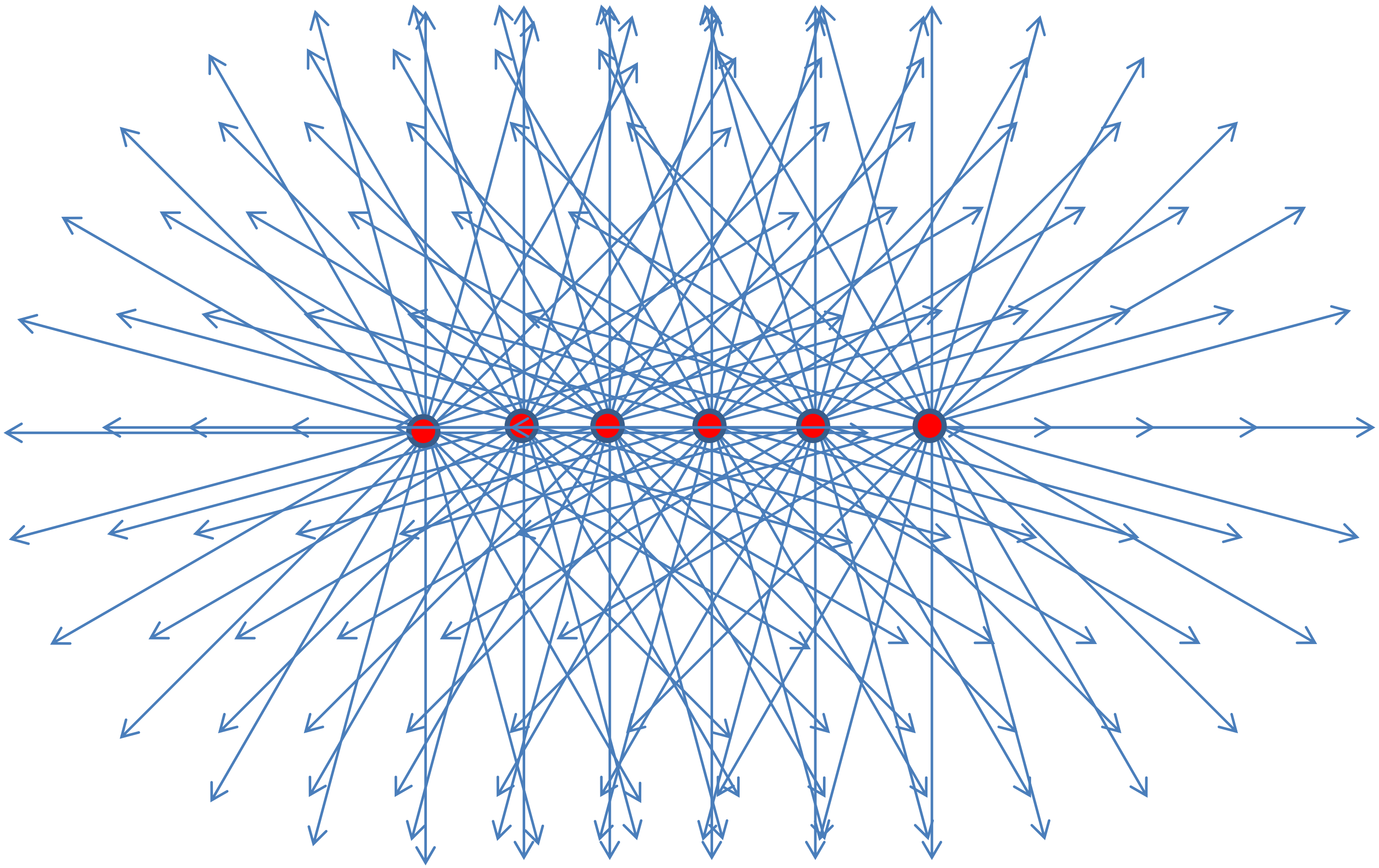
$$\Psi(r,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(R(t_0) - \frac{1}{c}\mathbf{R}(t_0)\cdot\mathbf{v_0}(t_0)\right)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R(t_0)}\frac{1}{1-\boldsymbol{\beta}(t_0)\cdot\mathbf{n}(t_0)}$$

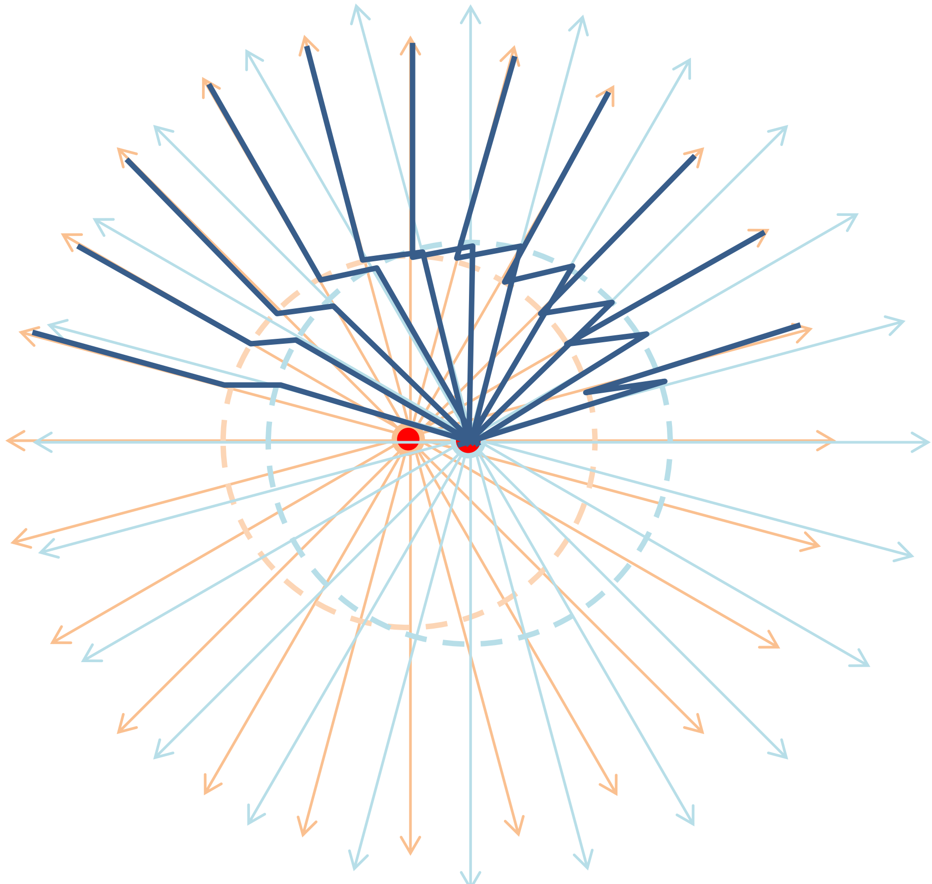
β = v/c

これだけ変化する



運動する荷電粒子?





電磁波

$$\mathbf{A}(r,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}(r',t-\frac{|r-r'|}{c})}{|r-r_0(t')|}d^3r'$$

$$=\frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{v}_0(t_0)}{\left(R(t')-\frac{1}{c}\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v_0}(t')\right)}$$

$$\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\Psi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$=\frac{\mathbf{v}_0(t_0)}{c^2}\Psi(\mathbf{r},t)$$

s=R-R・v/c

$$E(r,t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(R-\frac{Rv_q}{c}\right)+\frac{1}{c^2s^3}R\times\left\{\left(R-\frac{Rv_q}{c}\right)\times\frac{\partial v_q}{\partial t'}\right\}\right]$$

$$B(r,t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{c^2s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)(v_q\times R)+\frac{1}{c^3s^3}\frac{R}{R}\times R\times\left\{\left(R-\frac{Rv_q}{c}\right)\times\frac{\partial v_q}{\partial t'}\right\}\right]$$

$$\mathbf{B}=\frac{\boldsymbol{n}(t_0)}{c}\times\mathbf{E}$$

荷電粒子の加速度の関数となる

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}-\frac{R v_q}{c}\right) + \frac{1}{c^2 s^3}\boldsymbol{R}\times\left\{\left(\boldsymbol{R}-\frac{R v_q}{c}\right)\times\frac{\partial v_q}{\partial t'}\right\}\right]$$

速度の関数

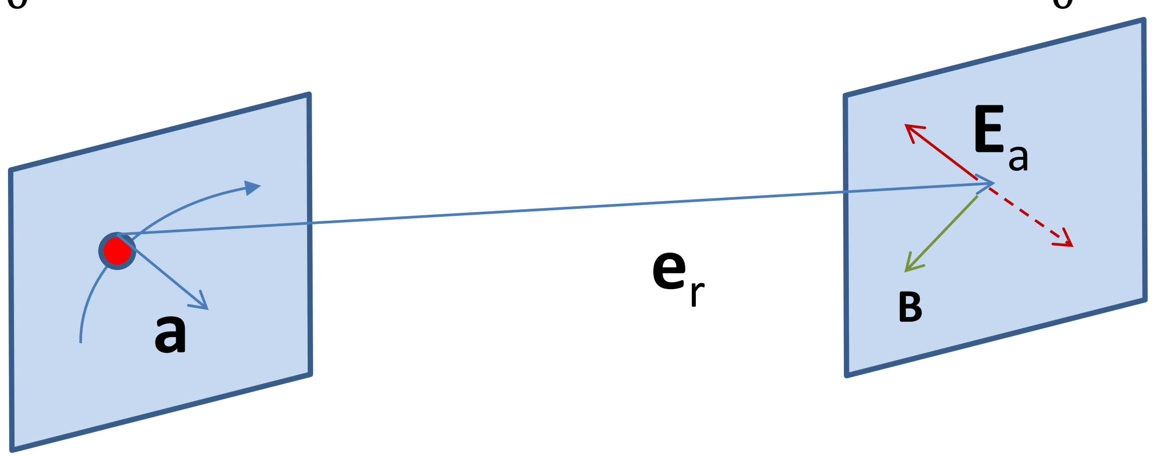
加速度の関数

遠方まで有効

s=R-R・v/c

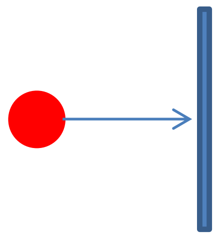
v/c << 1の時 遠方では　　s->r, **R**/s->$\mathbf{e}_r$

$$\mathbf{E_a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left[\mathbf{e}_r\times(\mathbf{e}_r\times\mathbf{a}) - (\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{a})\beta\right] \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\mathbf{e}_r\times(\mathbf{e}_r\times\mathbf{a})$$

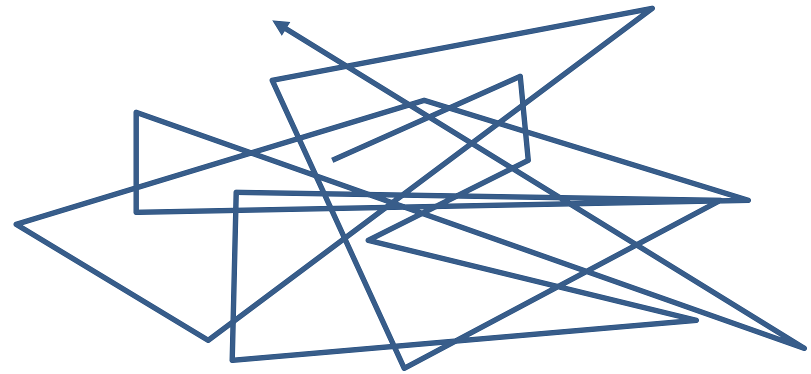


加減速をともなう放射の例

制動放射



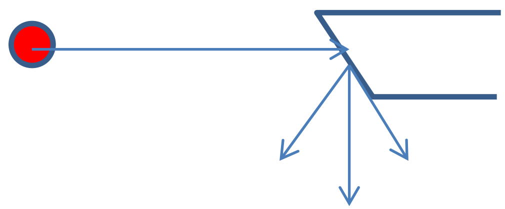
$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v_q}{c}\right)^5}$$

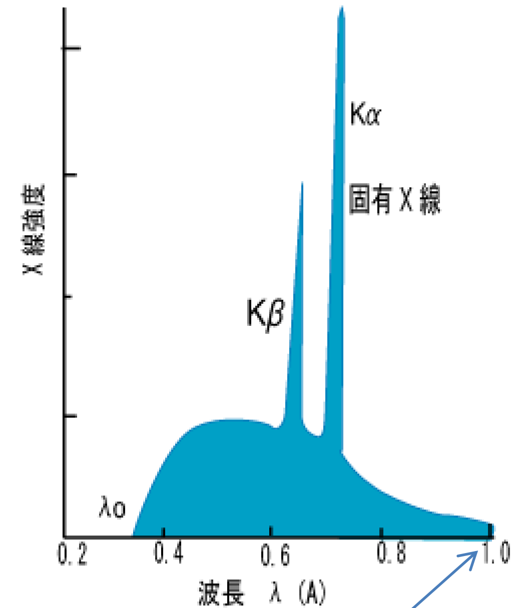


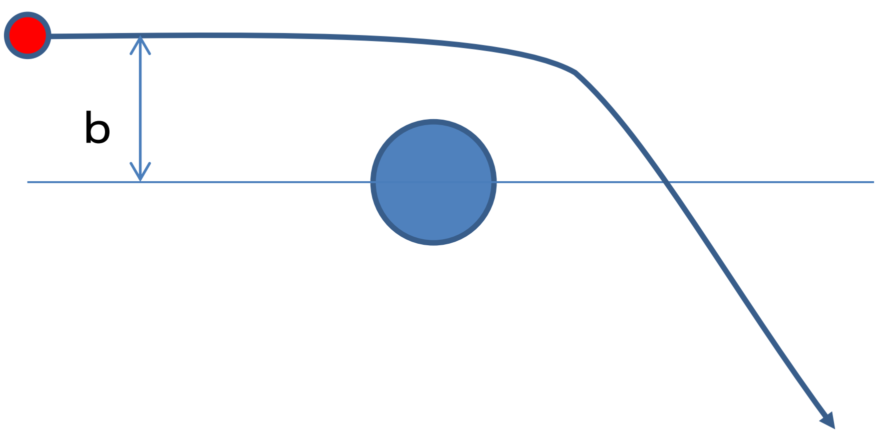
熱放射も制動放射

制動放射

X線管





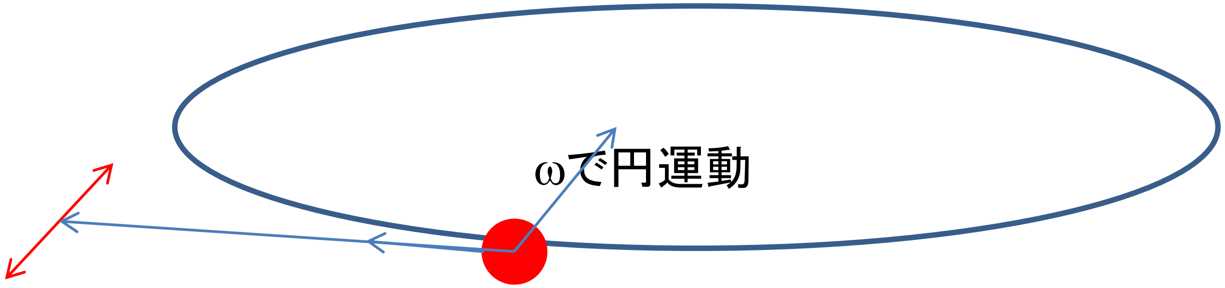


$$\omega_{\max} = m_e v^2 / 2\hbar$$

$$P(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{12\pi^3 \varepsilon_0{}^3 c^3 m_e{}^2} \frac{1}{v} ln\left[\frac{8\pi\varepsilon_0 m_e v^3}{Z e^2 \omega}\right]$$

加減速をともなう放射の例

サイクロトロン運動



$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3}(1 + \cos^2\theta)$$

Maxwell equations => Electro-magnetic wave

双極子放射も

Maxwellの式

$$div\vec{\mathbf{D}} = \rho$$

$$div\vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} = \left\{\frac{3[p]}{R^5} + \frac{3[\dot{p}]}{cR^4} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2R^3}\right\}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R})\mathbf{R} - \left\{\frac{[p]}{R^3} + \frac{[\dot{p}]}{cR^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2R}\right\}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{B} = \left\{\frac{[\dot{p}]}{cR^3} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2R^2}\right\}(\mathbf{n}\times\mathbf{R})$$

R>>1

$$E_R = 2\left(\frac{[p]}{R^3} + \frac{[\dot{p}]}{cR^2}\right)\cos\theta$$

$$E_\theta = \left(\frac{[p]}{R^3} + \frac{[\dot{p}]}{cR^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2R}\right)\sin\theta$$

$$H_\varphi = \left(\frac{[\dot{p}]}{cR^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2R}\right)\sin\theta$$

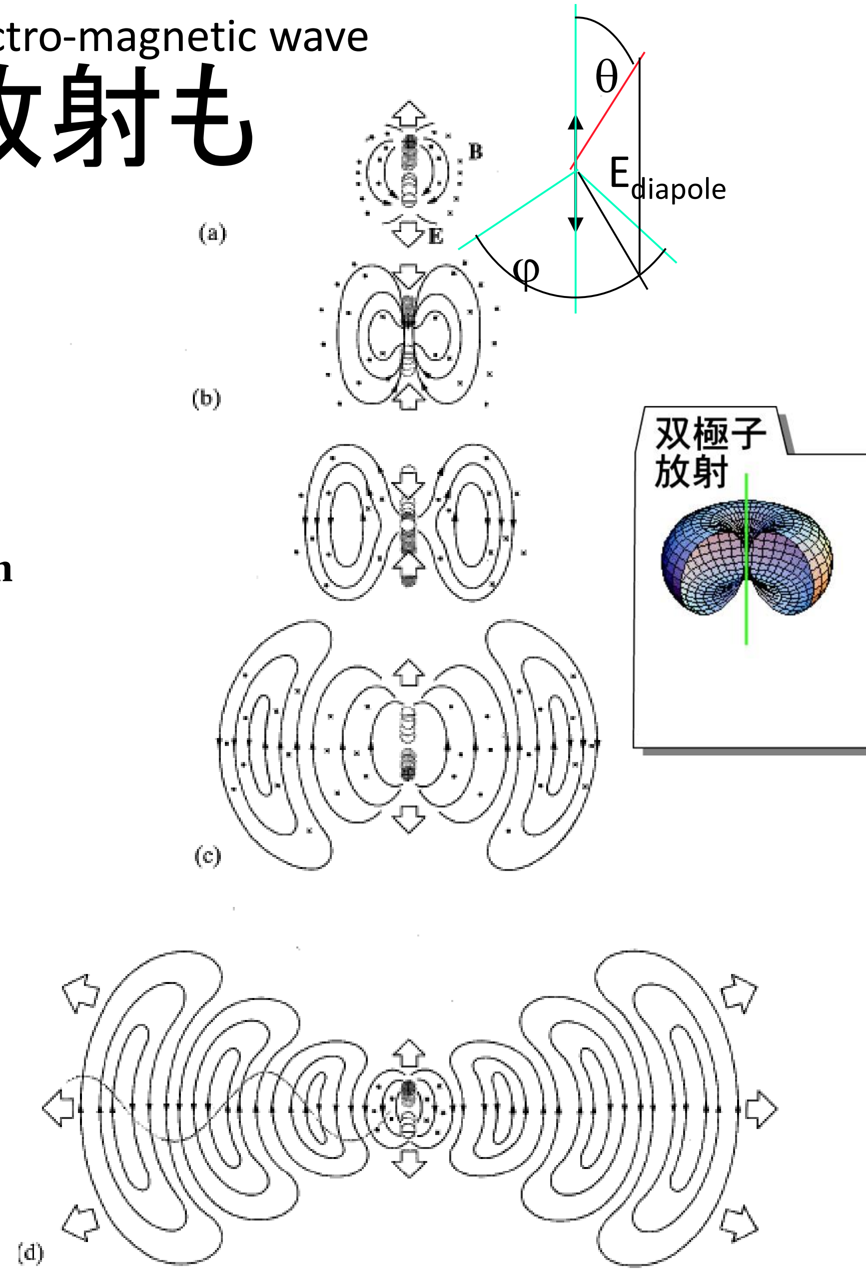
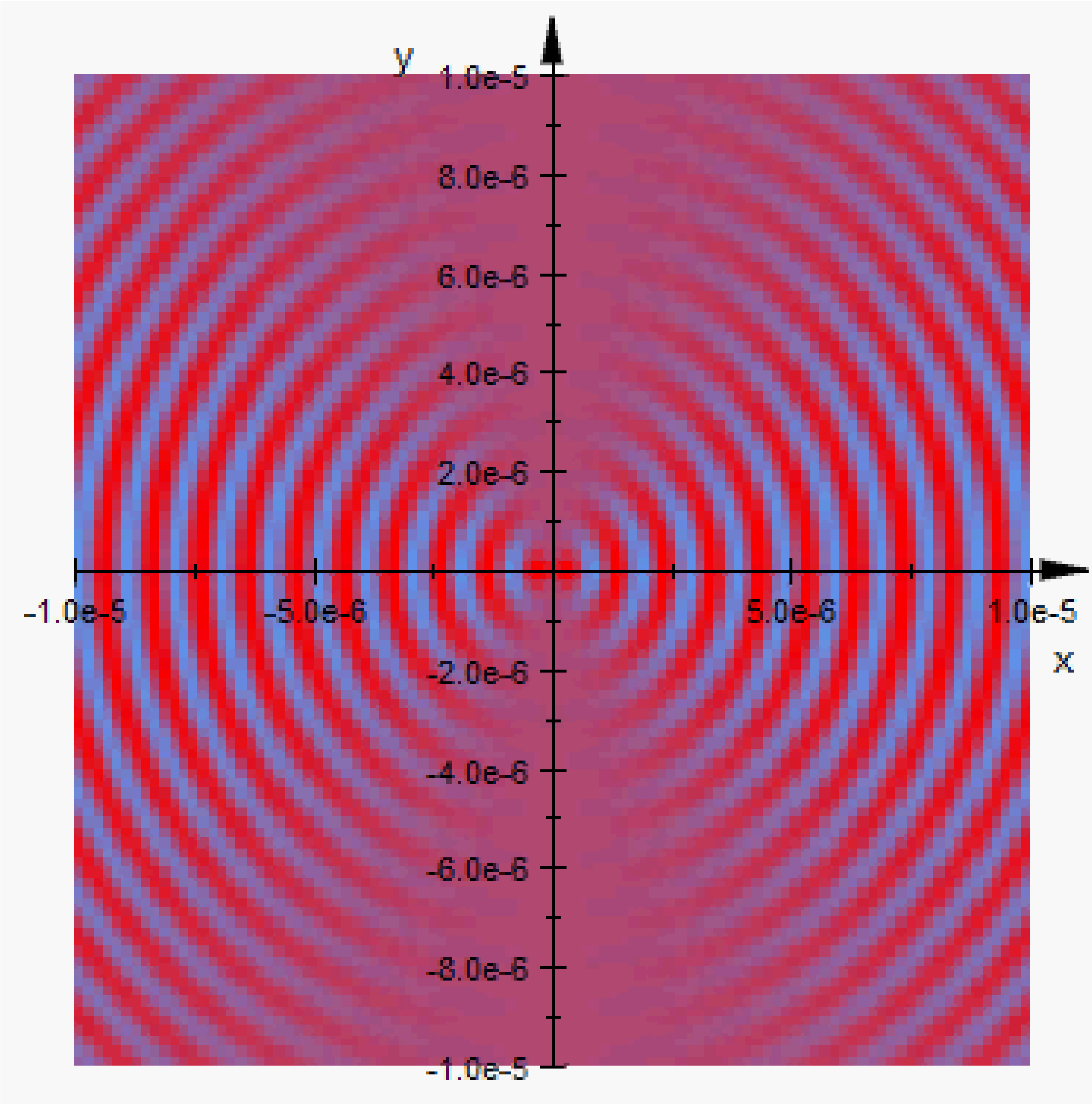


Figure 3.21 The E-field of an oscillating electric dipole.



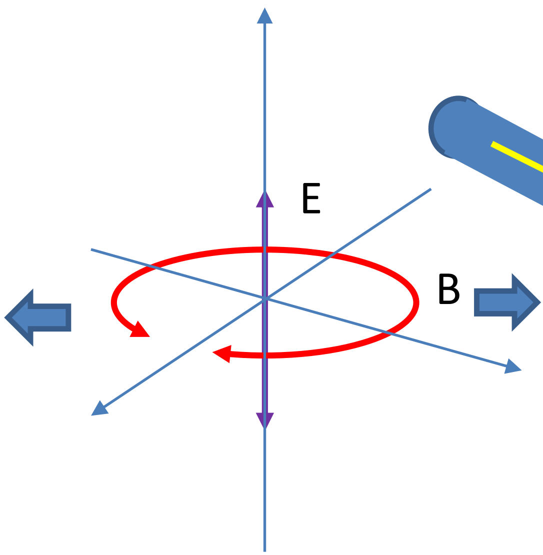
y
1.0e-5
8.0e-6
6.0e-6
4.0e-6
2.0e-6
-2.0e-6
-4.0e-6
-6.0e-6
-8.0e-6
-1.0e-5
-1.0e-5
-5.0e-6
5.0e-6
1.0e-5
x

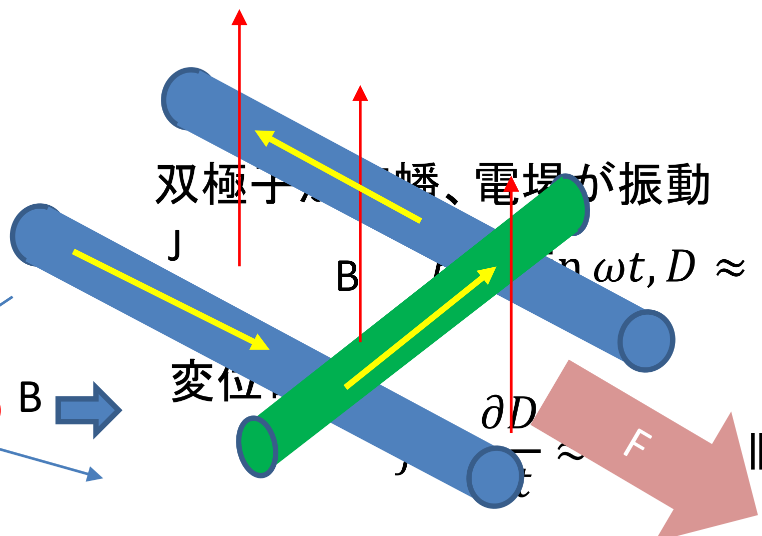
振動双極子からどうして電波が放射されるか？

霜田光一
物理教育学会誌26-2，1978

どうして？電磁波？　　　押し出す力？

ローレンツカ　$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = \left(\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}\right)$　電流と磁場で力





双極子…、電場が振動

… $n\,\omega t, D \approx \varepsilon_0 \sin \omega t$

変位…

$j = \frac{\partial D}{\partial t} \approx$ … $\parallel E \perp B$

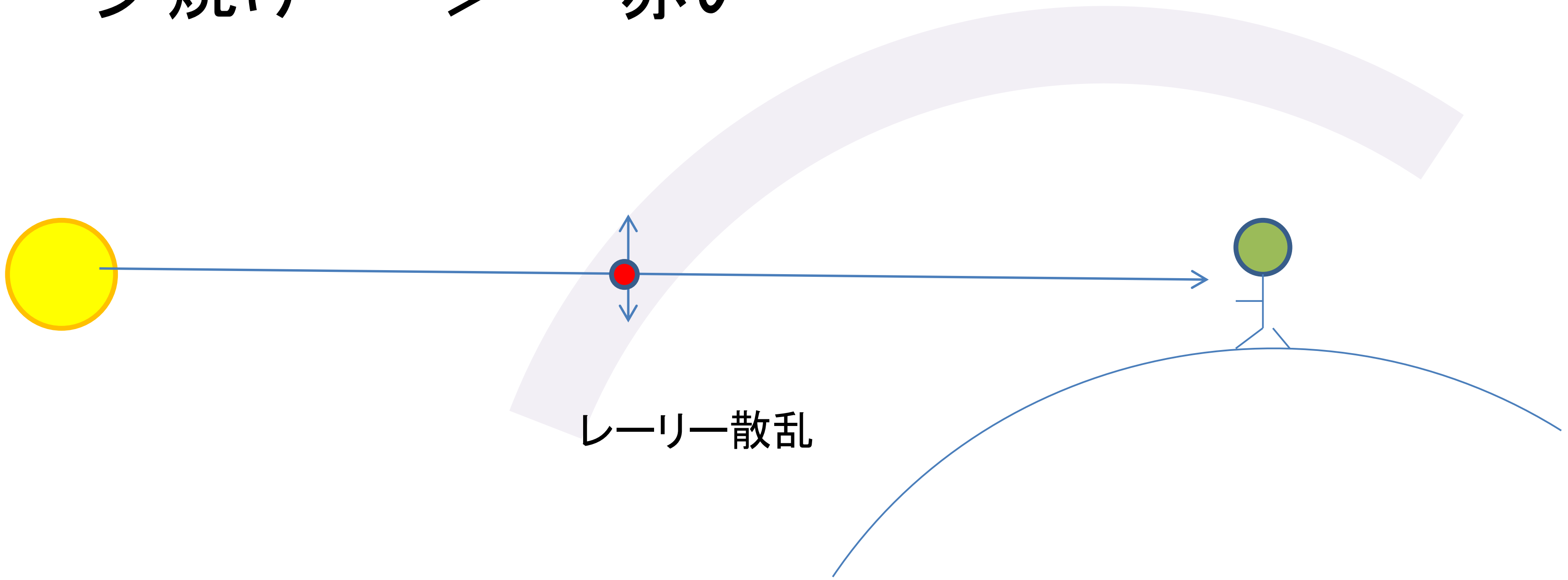
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

ローレンツカ

$$\vec{F} = \left(\vec{j} \times \vec{B}\right) \approx \cos \omega t\, \vec{e}_E \times \cos \omega t\, \vec{e}_B = \cos^2 \omega t\, \overrightarrow{e_{E\times B}}$$

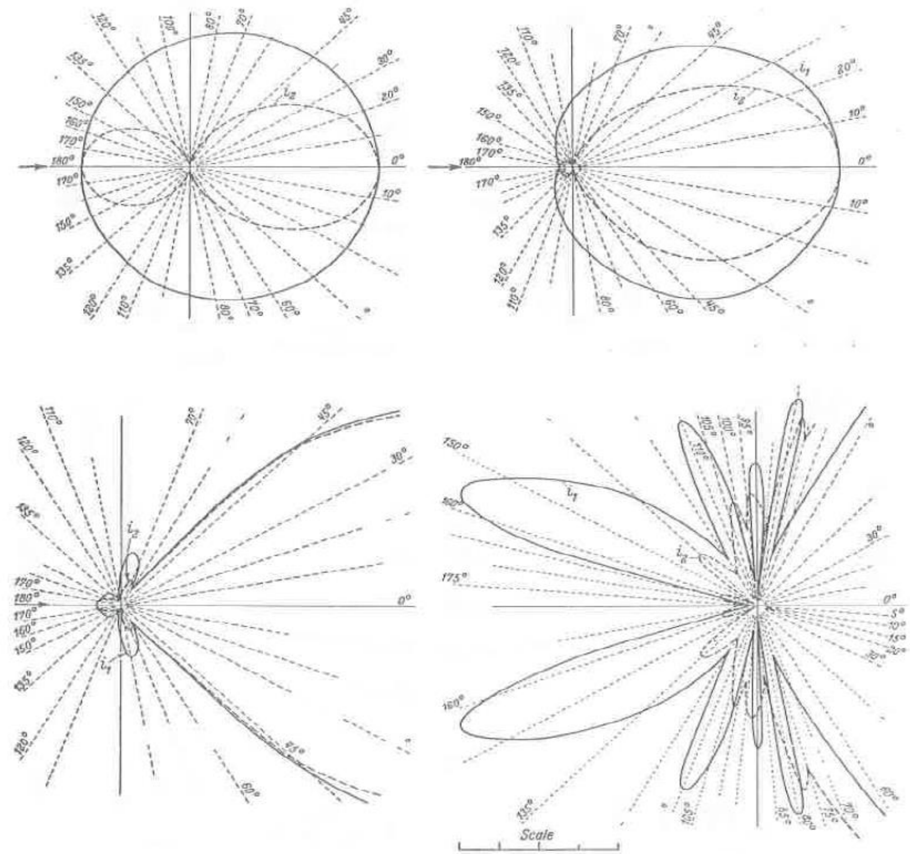
散乱も放射と考えられます

- 夕焼け　＝＞　　赤い

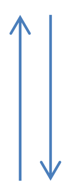


さらに複雑な散乱、放射

- ミー散乱



- 多重極子放射



Born & Wolf, Principle of Optics