電磁波工学VI

グリーン関数

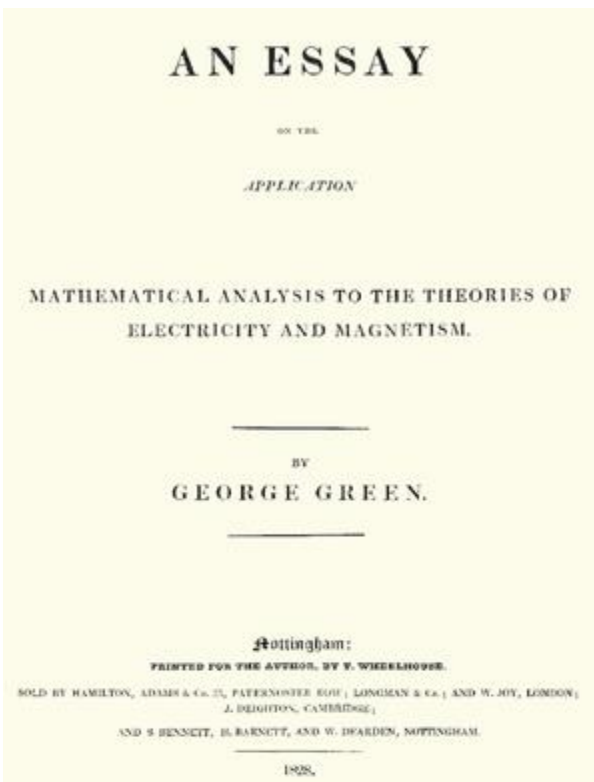
米田仁紀

電磁波解を求める手法をちゃんと考える

微分方程式から積分して解を求める必要がある。

一般的な手法で、なおかつ原理的に簡単な解法が必要

特に電磁波や電磁界は、境界値問題
（グリーン関数）



AN ESSAY

ON THE

APPLICATION

MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF
ELECTRICITY AND MAGNETISM.

BY
GEORGE GREEN.

Nottingham:
PRINTED FOR THE AUTHOR, BY T. WHEELHOUSE.
SOLD BY HAMILTON, ADAMS & Co. 33, PATERNOSTER ROW; LONGMAN & Co.; AND W. JOY, LONDON;
J. DEIGHTON, CAMBRIDGE;
AND S BENNETT, H. BARNETT, AND W. DEARDEN, NOTTINGHAM.

1828.

1793 - 1841

微分方程式を簡単に解く方法は？

フーリエ変換
ラプラス変換

$$\frac{\partial A}{\partial t} \Rightarrow \ i\omega\tilde{A}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma^2 A = F(t)$$

$$(-\omega^2 + \gamma^2)\tilde{A} = \tilde{F}$$

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{F}}{(-\omega^2 + \gamma^2)}$$

$$\omega = \pm\gamma$$

そもそもGreen関数とは

常微分方程式もしくは偏微分方程式の境界値問題を解く際に有用なグリーン作用素の積分核として現れる関数のこと。

ある微分方程式　$\mathcal{L}|F(t)|$=q(t)

この解が　$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')q(t')dt'$　という形で書けるとすると

×$\mathcal{L}$（微分演算子）を作用すると　$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}|G(t,t')|q(t')dt'$

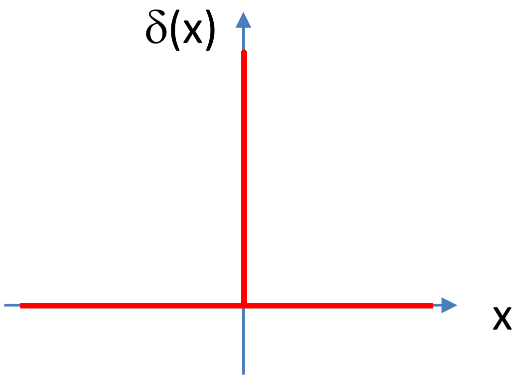
この答えは自明で　$\mathcal{L}|G(t,t')| = \delta(t-t')$

したがって、インパルス的な応答を求めておけば、
それを積分すれば、一般的な問題が解ける。

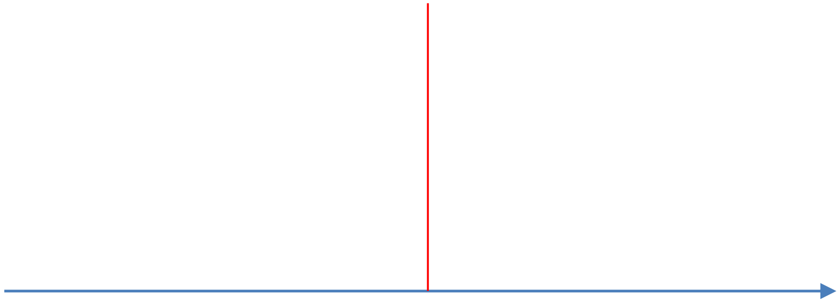
少なくともδ関数の積分性質は知っておかないと

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

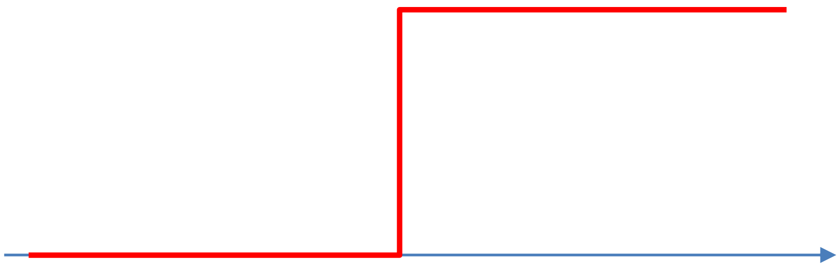
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx$$



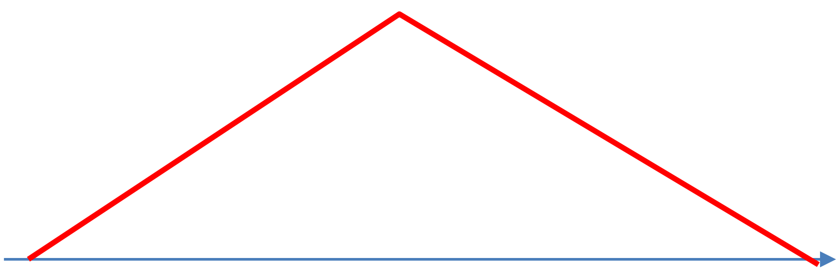
$$f(x) = \int \delta(x-y) f(y)\, dy$$



$\delta(x - x_0)$

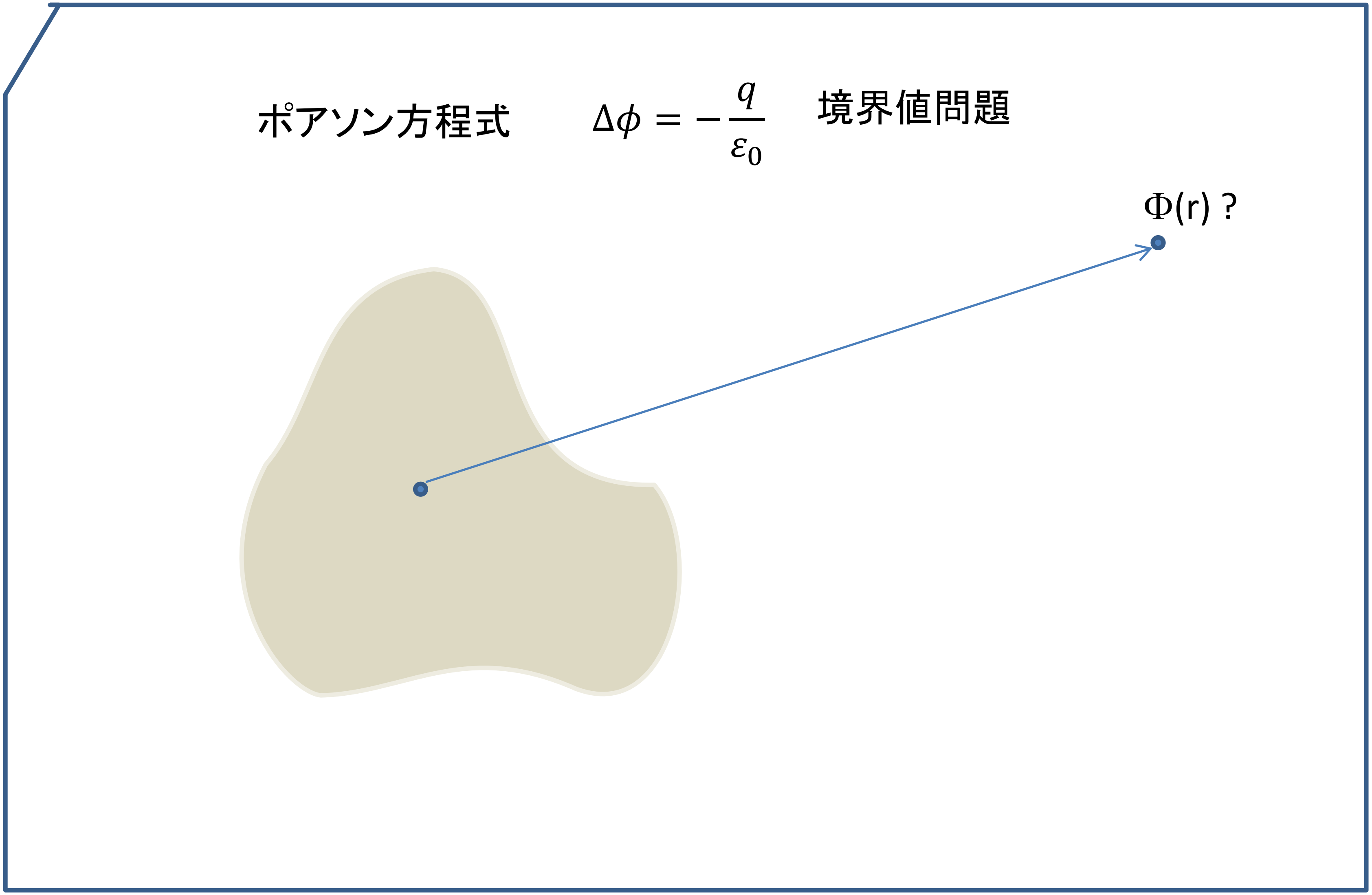


$$\int \delta(x - x_0)\, dx = u(x - x_0)$$



$$\int u(x - x_0)\, dx = \begin{cases} ax + b & x < x_0 \\ a'x + b' & x > x_0 \end{cases}$$

境界条件



もう一度Green関数を考える

大事なのは

ある微分方程式があった時に $\mathcal{L}|F(t)|$=q(t)

この解が $$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,t')q(t')dt'$$ という形で書けること

×$\mathcal{L}$をすると $$q(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{L}|G(t,t')|q(t')dt'$$

すなわち $$\mathcal{L}|G(t,t')|=\delta(t-t')$$ のようにインパルス応答になるということ

例：Poisson 方程式をグリーン関数で解く

Laplacian

$$\Delta\phi(x) = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = -s(x)$$

$$\Delta G(x) = -\delta(x)$$ があるとする

$\phi(x)$は、

$$\phi(x) = \int G(x-x')(-\frac{\rho(x')}{\varepsilon_0})\,dx' = \int G(x-x')s(x')\,dx'$$ となる

証明：なぜなら、この式のΔを計算すると（Δはxのみの微分であることに注意）

$$\Delta\phi(x) = \Delta\int G(x-x')s(x')\,dx' = \int \Delta G(x-x')s(x')\,dx' = -\int \delta(x-x')s(x')dx' = -s(x)$$

後は、

$$\Delta G(x) = -\delta(x)$$ となるG(x)をもとめればいい。

フーリエ変換の性質から

$$F(k)=\int f(x)e^{-ikx}dx$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int F(k)e^{ikx}dk$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\int f(y)e^{-iky}dy\,e^{ikx}dk=\frac{1}{2\pi}\int dy f(y)\int e^{ik(x-y)}dk=\int f(y)\delta(x-y)dy$$

したがって、 $\int e^{ik(x-y)}dk=2\pi\delta(x-y)$

$\Delta G(x)=-\delta(x)$ を解くには、　両辺をフーリエ変換してフーリエ成分で表示

$$G(x)=\frac{1}{2\pi}\int \hat{G}(k)e^{ikx}dk$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}dk$$

（δ関数のフーリエ変換は1）

Laplacianは空間の2階微分

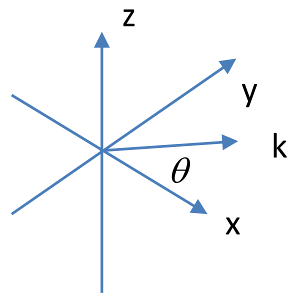
$$\Delta G(x)=\frac{1}{2\pi}\int \hat{G}(k)(\Delta e^{ikx})dk=\frac{1}{2\pi}\int \hat{G}(k)(-k^2e^{ikx})dk=-\frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}dk$$

$$\hat{G}(k)=\frac{1}{k^2}\qquad G(x)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{1}{k^2}e^{ikx}dk$$ （1次元）

$$G(x)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\frac{1}{k^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}dk$$ （d次元）

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \frac{1}{k^2} e^{i\mathrm{kx}} dk$$ これを積分する。

case 1 k空間で3次元的な場合



$\frac{1}{|k|^2}$だけの関数なので、極座標表示 k, θ, φ

θをX軸基準にとって

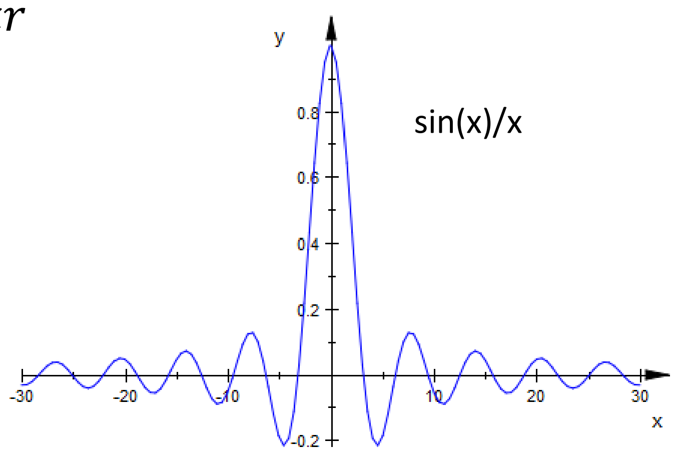
$dk = k^2 dk \sin\theta d\theta\, d\varphi$ なので

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk \int_{-\pi}^{\pi} sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{ikrcos\theta}$$ $\mu = \cos\theta\,,\quad d\mu = -\sin\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk \int_{-1}^{1} d\mu\, e^{ikr\mu} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk \left[\frac{1}{ikr} e^{ikr\mu}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk \frac{2}{kr}\left(\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2i}\right) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk \frac{\mathrm{sin}kr}{kr}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 r}\underbrace{\int_0^\infty d\tau \frac{\mathrm{sin}\tau}{\tau}}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4\pi r}$$



case 2　ちなみに2次元だと

$$dk = kdkd\theta$$

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{1}{k} dk \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{ikrcos\theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{k} dk J_0(kr)$$

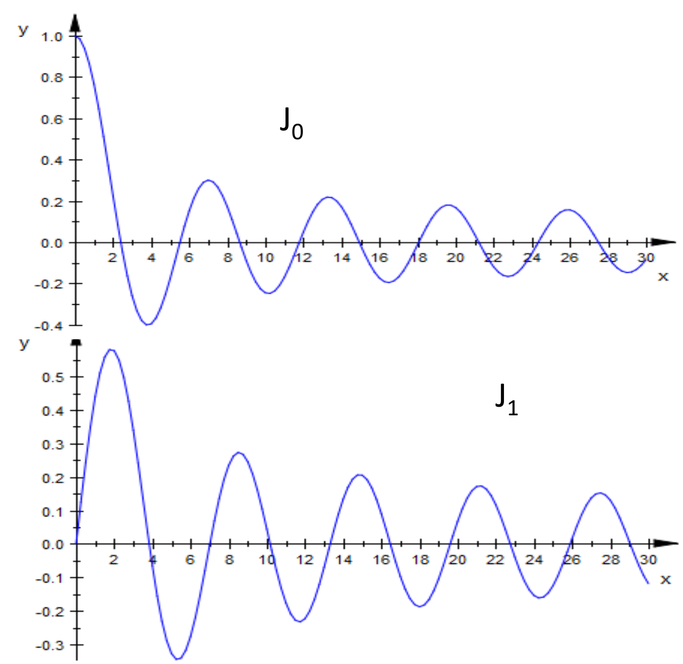
第１種Bessel関数

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{iz\cos t} e^{in(t-\frac{\pi}{2})}$$

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{iz\cos t}$$

$$J_n(z) \equiv \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

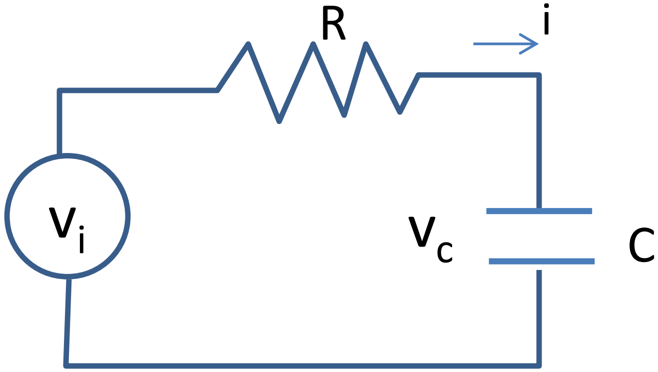
$$\frac{\partial J_0(x)}{\partial x} = -J_1(x)$$



$$\frac{dG(r)}{dr} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} J_1(kr)dk = \frac{1}{2\pi}[J_0(kr)]_0^\infty = -\frac{1}{2\pi r}$$

$$G(r) = -\frac{1}{2\pi r}\log r$$

電気回路で考えてみる



$$Ri + \int \frac{i}{C} dt = v_i$$

$$v_c = \int \frac{i}{C} dt \qquad RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = v_i$$

これを解くには、

$v_i = 0$ とまずおいて

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$$

$$v_c = v_0 e^{-t/RC}$$

$$RC\left(\frac{dv_0}{dt} e^{-\frac{t}{RC}} - v_0 \frac{1}{RC} e^{-t/RC}\right)$$

これを元の式に代入して

$$RC\frac{dv_0}{dt} e^{-t/RC} = v_i$$

これを積分して

$$v_0(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{RC}} v_i(t')dt'$$

この時のGreen 関数は

$$G(t,t') = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-t'}{RC}} \underbrace{\mathrm{H}(t-t')}_{\text{Step関数}}$$

となる

もう一度　Green 関数とは

ある微分方程式　　$\mathcal{L}|F(t)|$=q(t)

この解が　$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')q(t')dt'$$　という形で書けること

ある微分方程式　$$RC\frac{dv_0}{dt}e^{-t/RC} = v_i$$

$$v_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')v_i(t')dt'$$

$$v_0(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{RC}}v_i(t')dt'$$

だから　$$G(t,t') = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t-t'}{RC}}\mathrm{H}(t-t')$$

周期的(定常的)な場合は？ $RC\frac{dv_c}{dt}+v_c=v_i$

$\mathcal{L}|G(t,t')|=\delta(t-t')$ であったので $RC\frac{dG}{dt}+G=\delta(t)$

これをフーリエ変換して $(i\omega RC+1)\mathrm{X}(\omega)=1$ ただし$\mathrm{X}(\omega)$はGのフーリエ変換

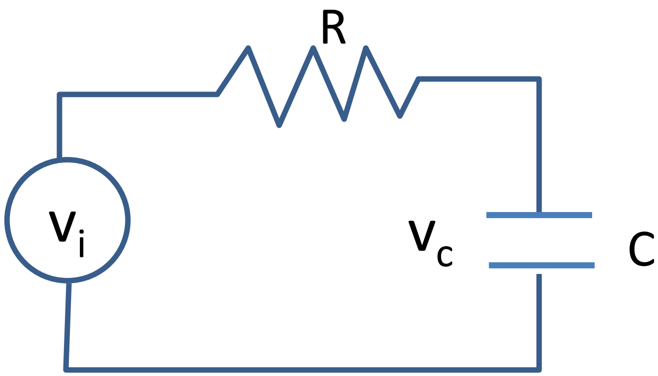
この答えは $\mathrm{X}(\omega)=\frac{1}{1+i\omega RC}$

これを逆変換して $G(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{1+i\omega RC}d\omega$

これは複素空間の積分で、i/RCに極が１つある。 =>留数定理

答えは同じ $G(t,t')=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t-t'}{RC}}\mathrm{H}(t-t')$

現象として考えれば



$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = v_i$$

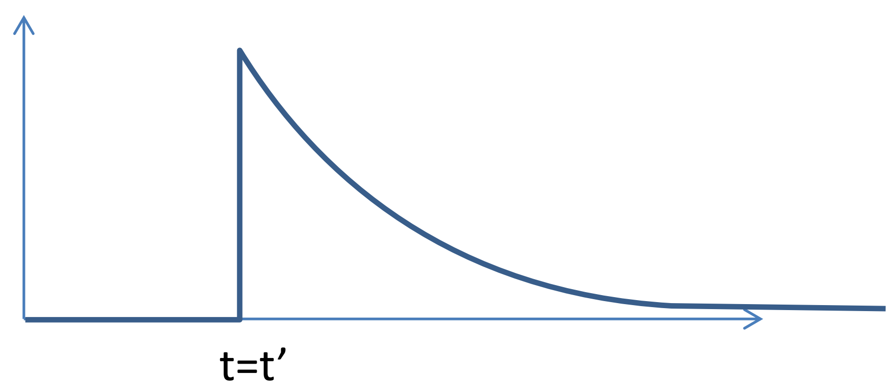
$$RC\frac{d}{dt} + 1 = L$$

$$\mathcal{L}|G(t,t')| = \delta(t - t')$$

となるG(t, t')が存在

ソース部がδ関数 （瞬時にチャージ）
＝＞チャージされた電荷はその後RC回路で減衰

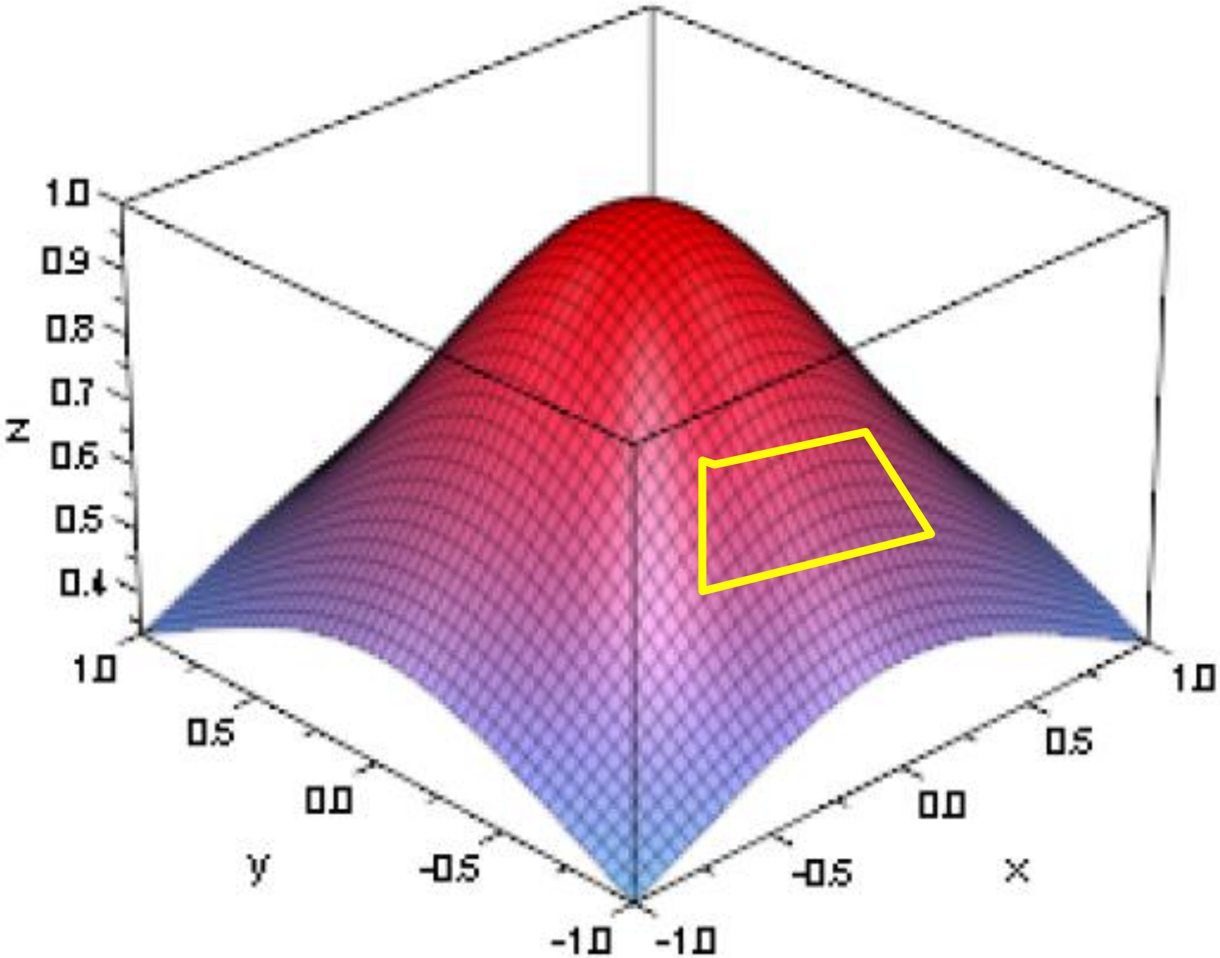
$$G(t,t') = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t-t'}{RC}}\mathrm{H}(t - t')$$



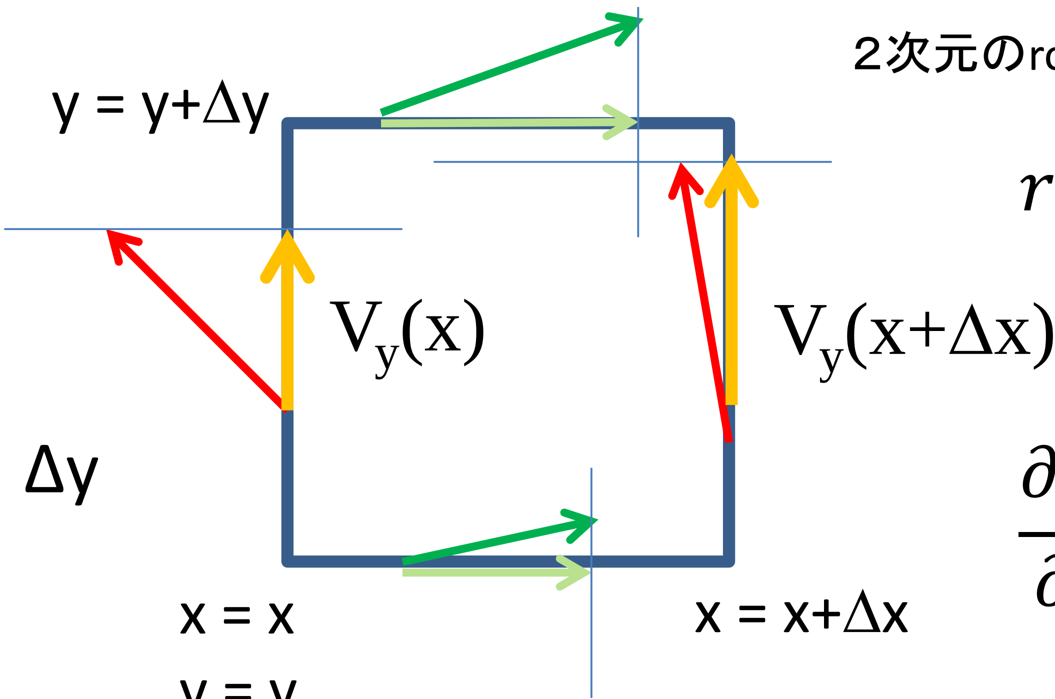
電磁波では　$\text{if}\ \nabla\times\mathbf{F}=0$、ならば$\mathbf{F}=\nabla f$　？

スカラーのポテンシャルfが定義された時
傾き(∇f)を一周する($\nabla\times$)と0になる。

f



Rotation（∇ ×）のおさらい

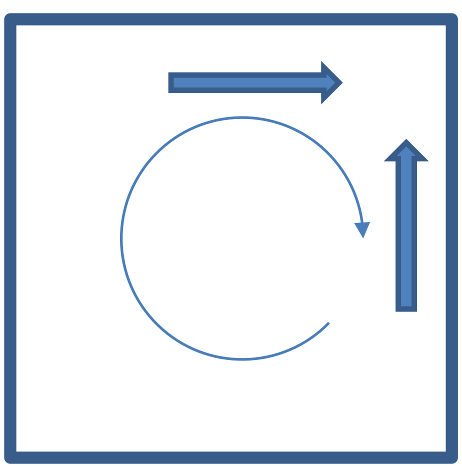


2次元のrot V

$$rot\mathbf{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{V_y(x+\Delta x) - V_y(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{V_x(y+\Delta y) - V_x(y)}{\Delta y}$$



証明

もし、$\nabla \times \mathbf{F} = 0$、ならば$\mathbf{F} = \nabla f$ ← スカラー関数

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{F_x(y + \Delta y) - F_x(y)}{\Delta y} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{F_y(x + \Delta x) - F_y(x)}{\Delta x}$$

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad F_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y}$$

$$rot\ F = -\frac{\dfrac{\boxed{f(x+\Delta x, y+\Delta y)} - \boxed{f(x, y+\Delta y)}}{\Delta x} - \dfrac{\boxed{f(x+\Delta x, y)} - \boxed{f(x, y)}}{\Delta x}}{\Delta y}$$

$$+\frac{\dfrac{\boxed{f(x+\Delta x, y+\Delta y)} - \boxed{f(x+\Delta x, y)}}{\Delta y} - \dfrac{\boxed{f(x, y+\Delta y)} - \boxed{f(x, y)}}{\Delta y}}{\Delta x}$$

$= 0$

$$\text{if } \nabla \times \mathbf{F} = 0\text{、ならば}\mathbf{F} = \nabla f$$

電磁気学の方程式（Maxwell eq.）を思い出してみれば、

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0$$

rot が 0 ということは、何らかのスカラー関数で書ける

$$\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\boldsymbol{\nabla} \Phi$$

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

電場が時間変化しなければ、E=-∇Φ

$\nabla\times$H=J+$\frac{\partial D}{\partial t}$、$\nabla \cdot D = \rho$に代入すると　（εE=D）

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times A = J + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}\right)\right)$$

ベクトル公式　$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$であるので

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A = \mu_0 J - \nabla\left[\nabla \cdot A + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-\nabla^2 A=\mu_0 J-\nabla\left[\nabla\cdot A+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]$$

同じようにφも

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}-\nabla^2 \Phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\cdot A+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]$$

この方程式は、もし

$$\underbrace{\left[\nabla\cdot A+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]=0}_{\text{Lorentz gauge}}$$ であれば簡単になる。

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-\nabla^2 A=\mu_0 J$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}-\nabla^2 \Phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

上と比べて
AとΦがカップルしていない
ソースは1つ

Lorentz gauge

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A = \mu_0 J$$

式の形は

$$\Box \Psi = \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$
$$= -g(\mathbf{r}, t)$$

電磁波源（ソース）

ソースは時間、空間で全部のものを足し合わせないといけないので

$$g(\mathbf{r}, t) = \int_{t'=-\infty}^{t} \int_{V'} g(\mathbf{r}', t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') dv' dt'$$

この積分を解く必要がある

例えば　自由空間のGreen 関数

r′とt′にだけソースがある場合の解は？

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$$

この関数Gは空間を一様とすれば、r′とt ‘を中心とする球面波の形になるはず

$R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, \tau = t - t'$とおけば

∇^2を極座標表示に

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 (RG)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = -\delta(\mathbf{R})\delta(t)$$

境界条件は扱う系による

R≠ 0 の時は

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2(RG)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = 0$$

$\times R$をして$G' = RG$と新しい変数を導入して書きなおすと

$$\frac{\partial^2(G')}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G'}{\partial \tau^2} = 0$$

この一般解は、波動方程式の一般解となって、波的な性質を持つ

$$G'(R,\tau) = f\left(\tau - \frac{R}{c}\right) + h(\tau + \frac{R}{c})$$

前進波、後進波

G'をGに戻せば

$$G(R,\tau) = \frac{f\left(\tau - \frac{R}{c}\right)}{R} + \cancel{\frac{h(\tau + \frac{R}{c})}{R}}$$

未来のソース
からの影響となっ
ておかしいので0に

$\dfrac{f\left(\tau-\frac{R}{c}\right)}{R}$ の具体的な関数を求める

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')}{\partial t^2}=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$$

の微分方程式をR=0の周りの非常に小さい領域で積分してみる。(R->0)

左辺 $\displaystyle\int_{V'}\left(\nabla^2 G(\mathbf{R},\tau)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\mathbf{R},\tau)}{\partial\tau^2}\right)_{R\to 0} dv'$

dv'=dxdydz

$$=\int_{V'}\left(\nabla^2\left(\frac{f(\tau)}{R}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(\frac{f(\tau)}{R}\right)\right) dv'$$

τ-R/c -> τ

τとRは独立

右辺

$$=-\int_{V'}\delta(r-r')\delta(\tau)dv'=-\delta(\tau)$$

$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)=-4\pi\delta(R),\ dv'=4\pi R^2 dR$ なので

$$-\int_{V'}4\pi f(\tau)\delta(R)dv'+\cancel{\frac{4\pi}{c^2}\int_{V'}R\frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial\tau^2}dR}=-\delta(\tau)$$

R->0では、

$$f(\tau)=\frac{\delta(\tau)}{4\pi}$$

f(τ-R/c) だったので

$$f\left(\tau-\frac{R}{c}\right)=\frac{\delta(\tau-\frac{R}{c})}{4\pi}$$

$$G(R,\tau)=\frac{\delta(\tau-\frac{R}{c})}{4\pi R}=\frac{\delta(t-t'-\frac{R}{c})}{4\pi R}$$

Green関数が求まった

このGreen 関数を使って

$$\Psi=\int_{t'=-\infty}^{t}\int_{V'} g(\mathbf{r}',t')\frac{\delta(\tau-\frac{R}{c})}{4\pi R}dv'dt'$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{g(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c})}{R}dv'=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{[g]}{R}dv'$$

$$[g]=g(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c})$$

retarded

一般的な手法で

$$\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=-g(\mathbf{r},t) \Rightarrow \Psi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{[g]}{R}dv'$$

だったので

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{[\rho]}{R}dv' \Leftarrow \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\nabla^2\Phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

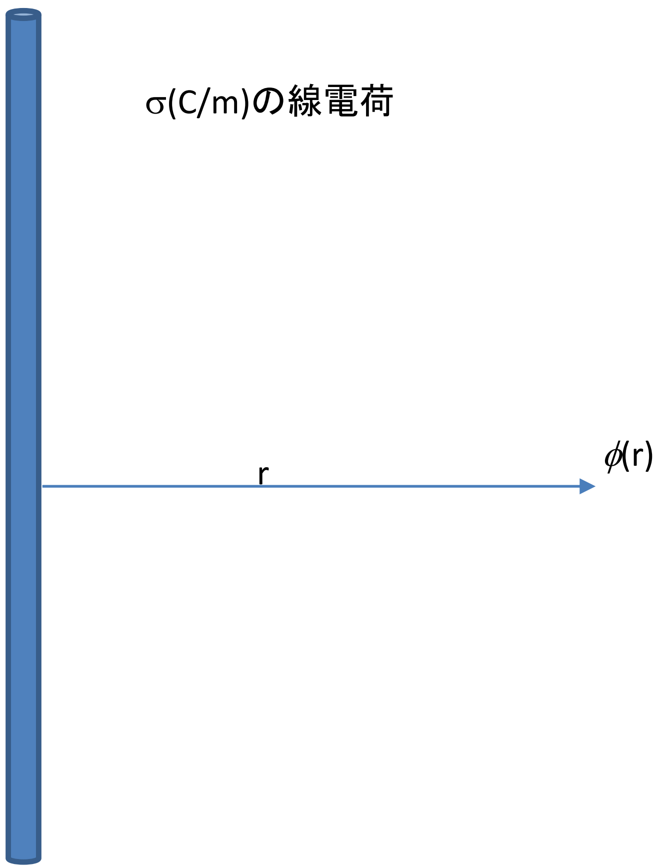
$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{[\mathbf{J}]}{R}dv' \Leftarrow \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-\nabla^2 A=\mu_0 J$$

ちなみにここで求めたポテンシャルと実際のEとBは

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

$$\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\Phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

練習問題　無限の長さの直線導体が一様線電荷σで帯電しているときに線からr離れた点での電位は？



点電荷なら

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |r - r_0|}$$

多くの電荷なら

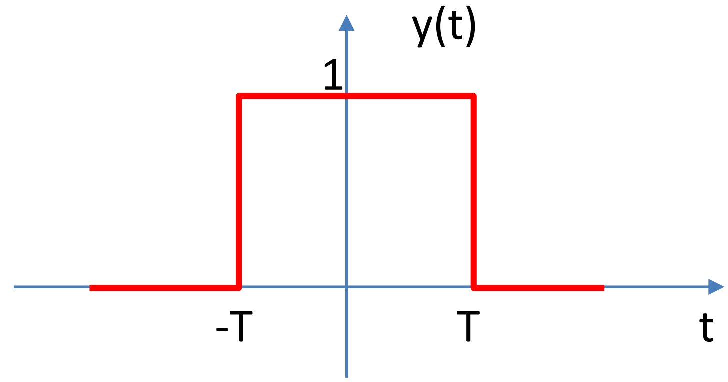
$$\phi(r) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV'$$

練習問題　フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

① $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)\, e^{-i\omega t} dt$

② $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt$　　ただしy(t)は右図



③ $\displaystyle g(t) = \sum_{j=1}^{10} \frac{\sin j}{j} \cos(j * x)$　　を$-\pi < t < \pi$　間でグラフ化しなさい